國立臺灣師範大學
資訊工程研究所碩士論文

指導教授：林順喜 博士

電腦圍棋打劫的最佳策略之研究

A Study of Optimal Strategies for Ko Fight of Computer Go

研究生：詹傑淳 撰

中華民國九十九年六月

摘 要

打劫問題在圍棋裏佔據了一個十分重要的位置。在過去圍棋的打劫問題研究上，由於雙方各種走法的組合過於繁複，因此並未能考慮到所有可能獲得更大利益的情況。本論文重新的探討在本劫的條件下圍棋的打劫策略。首先，我們在打劫過程中將所有可能發生的情況都納入考慮，來確保不會有可能獲得更大利益的情況被忽略，利用 MiniMax 的搜尋原則建構出打劫的流程圖。接下來利用 bottom up 的方法來比較雙方的利益差，將不可能走到的分支砍掉，來找到正確決策的判斷式，因此我們可以得到在不同劫爭價值、有價值棋步、雙方劫材下最佳的決策。

關鍵詞 ：電腦圍棋、劫爭、打劫、劫材、本劫、損劫、最大最小搜尋法

ABSTRACT

Ko fight plays a very important role in Go. How to get the best profit for all possible situations has not been shown in the past study of ko fight problem, because it has a huge number of possible outcomes. In this thesis, we reconsider the optimal strategies over all the possible situations, which could be happened during the process of the ko fight. We build a flow chart of ko fight for each situation by MiniMax search tree. By comparing the difference of the profits between two subtrees, we then prune the worse branches of the game tree in a bottom-up fashion. Finally, we find the correct decision formulas for all possible situation. Therefore, we can find the best strategy in a ko fight with the consideration of ko threats and valuable moves.

Keywords: Computer Go, Ko, Ko Fight, Ko Threat, Real Ko, Damage Ko,

MiniMax Search

誌　謝

首先感謝我的指導教授林順喜博士，在研究所兩年的期間，給予我的引導與啟發，訓練了研究的態度與方法，並且教導了許多演算法與人工智慧領域的相關知識，使我獲益良多。

另外還要感謝實驗室的其他成員潘典台學長、魏仲良學長、黃士傑學長、莊臺寶學長、趙義雄學長、劉雲青學長、白聖群學長、葉俊廷學長、黃信翰學長，同學賴昱臣、陳俊佑、謝政孝、李明臻、李啟峰，以及學弟妹勞永祥、陳志宏、蔡宗賢、唐心皓。

特別感謝立德學長、士傑學長、雲青學長、聖群學長及永祥學弟，平時在研究的過程中給與我指導以及建議與方向。

最後感謝我的父母栽培我，並適時地給予鼓勵與支持，讓我能順利完成學業，僅將此論文獻給我最敬愛的父母及家人。

目錄

圖目錄

表目錄

第一章　緒論

第一節　前言

圍棋起源於中國古代，推測起源時間為大約公元前六世紀。傳說堯的兒子丹朱頑劣，堯發明圍棋以教育丹朱，陶冶其性情。圍棋的最早可靠記載見於春秋時期的《左傳》。戰國時期的弈秋是鑑於史籍的第一位棋手。南北朝時候，棋盤定型為現在的 19 路棋盤，並且出現了評定棋手水準的圍棋九品制[11]。圍棋逐漸成為中國古代知識階層修身養性的一項必修課程，為「琴棋書畫」四藝之一。唐代出現了棋待詔官職。著名棋手王積薪作「圍棋十訣」，在現代圍棋中依舊適用。明代王世貞寫了一篇《弈問》，回答了圍棋的種種疑問。

清朝初年，出現了中國古代圍棋發展的一個高峰期。大批著名棋手湧現，留下大量名局棋譜，如黃龍士與徐星友的「血淚篇」、施襄夏與范西屏的「當胡十局」。同時，圍棋理論的研究亦達到一個高峰，代表作有徐星友的《兼山堂弈譜》和施襄夏的《弈理指歸》等。

圍棋在公元 7 世紀傳入日本，很快就流行於宮廷和貴族之中。戰國末期，豐臣秀吉設立「棋所」，德川幕府時代，出現了在天皇或將軍面前對弈的「御城棋」，日本圍棋逐漸興盛，出現了本因坊、安井、井上、林等圍棋世家。其中坊門尤其人才輩出，先後出現了道策、秀策、秀甫、秀榮等傑出棋士。日本圍棋由於廢除了中國古代圍棋的座子制(古代中國圍棋是放四個座子，就是兩黑兩白放在對角星的位置上，雙方在這個基礎上開始佈局)，佈局理論得以極大發展。[10,12]

現今，圍棋這遊戲已經普及到全世界，但最盛行的還是在亞洲，不只是下棋的人口多，也有職業的比賽以及棋手的培養，台灣、中國、日本及韓國可以說是目前圍棋發展最鼎盛的國家。

圍棋的規則簡單且變化複雜的特性，使對弈者能夠自由的在棋盤上發揮創造力，建構出自己的一套風格。因此圍棋不只是被大家視為一個益智遊戲，也被認為是一門藝術。

打劫問題在圍棋中也佔據了一個十分重要的地位，在對局中也是時常發生打劫的情形。即使是世界頂尖的圍棋大師也不一定能完全的打好劫爭，甚至因此影響勝負。如世界頂尖的棋手李昌鎬，在 2009 年的第七屆春蘭盃圍棋賽的決勝局中，李昌鎬執白子，對決中國棋手常昊執黑子。在中盤時根據一流棋士認為李昌鎬的形勢大優。常昊只好開始做最後的努力，認為中央白棋存在一些弱點是黑棋最後的機會。接下來白棋在中央使用打劫做活，圖 1.1 所示。白棋 182 手於中央造劫，黑棋於 183 手選擇提劫，但是在打劫的過程中，白方 184 手找劫材出現重大的錯誤，導致李昌鎬中央勉強做活，但是在上邊付出了重大的代價。如果白方在左邊 185 位尋劫的話，常昊的劫材明顯不夠。在上邊白棋被黑棋穿破，最終上邊的白棋全死。最終結果為圖 1.2 所示，常昊中盤獲勝。[7,8]

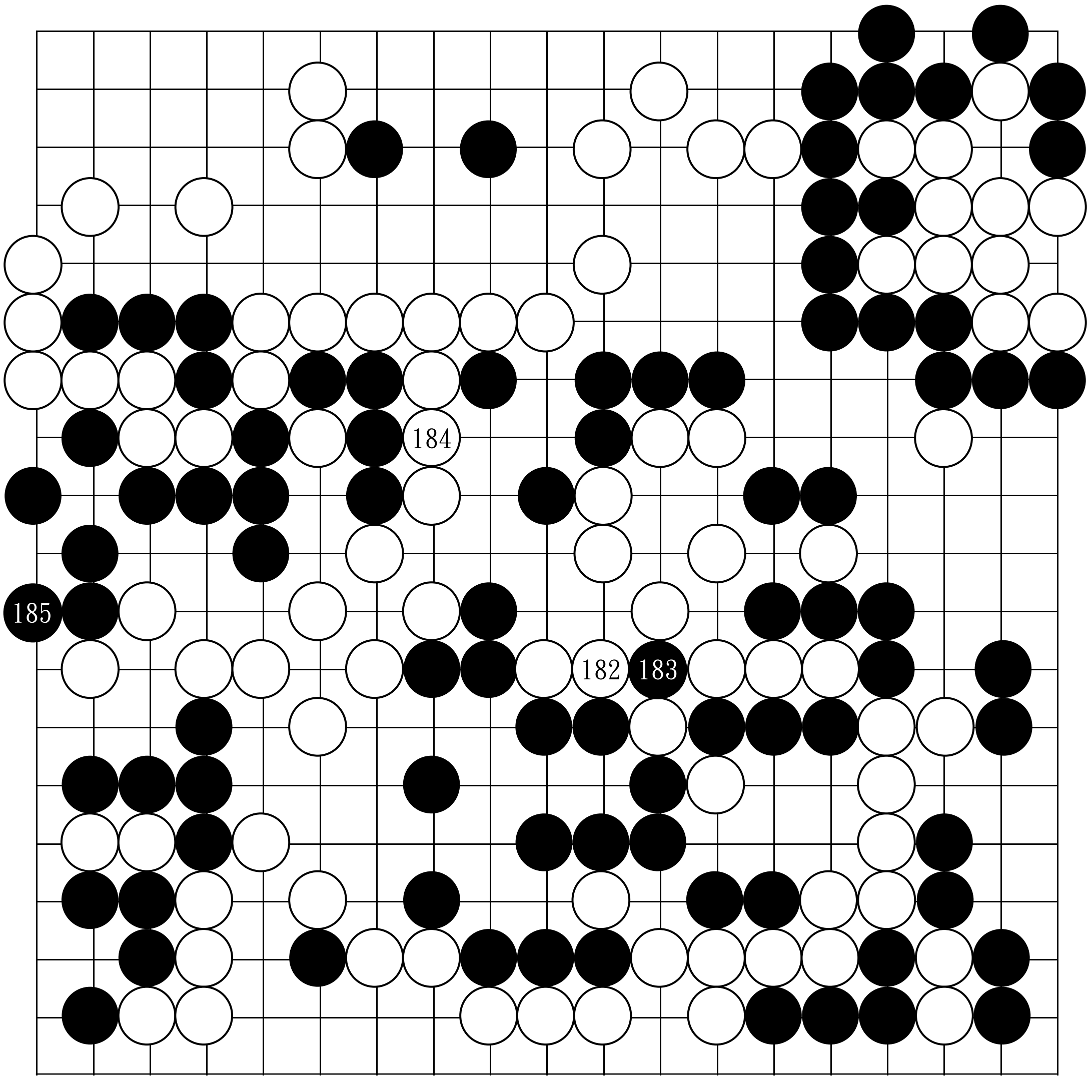


圖 1.1 第七屆春蘭盃圍棋賽的決勝局-常昊執黑對李昌鎬執白[7]

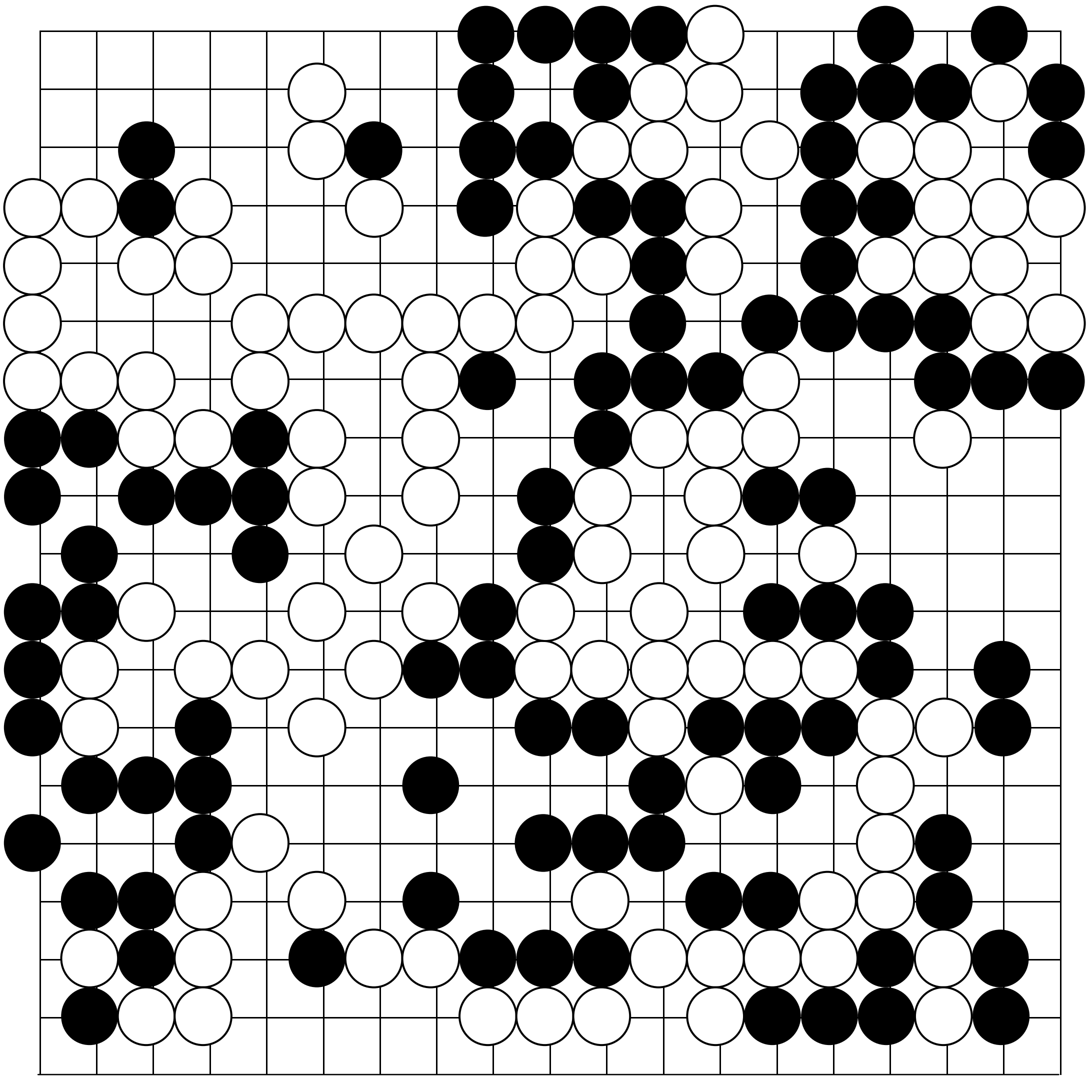


圖 1.2 第七屆春蘭盃圍棋賽的決勝局結束盤面-常昊執黑對李昌鎬執白[7]

第二節　圍棋的相關知識

圍棋的規則一般來說有分為《中國圍棋規則》、《日本圍棋規則》及《應氏圍棋規則》，但是其基本的原則卻是大同小異，而基本圍棋規則共有五點，只要遵守基本的五條規則，就可以下在盤面的任何位置。基本規則為以下五點：

(1). 執黑先下，交互下子

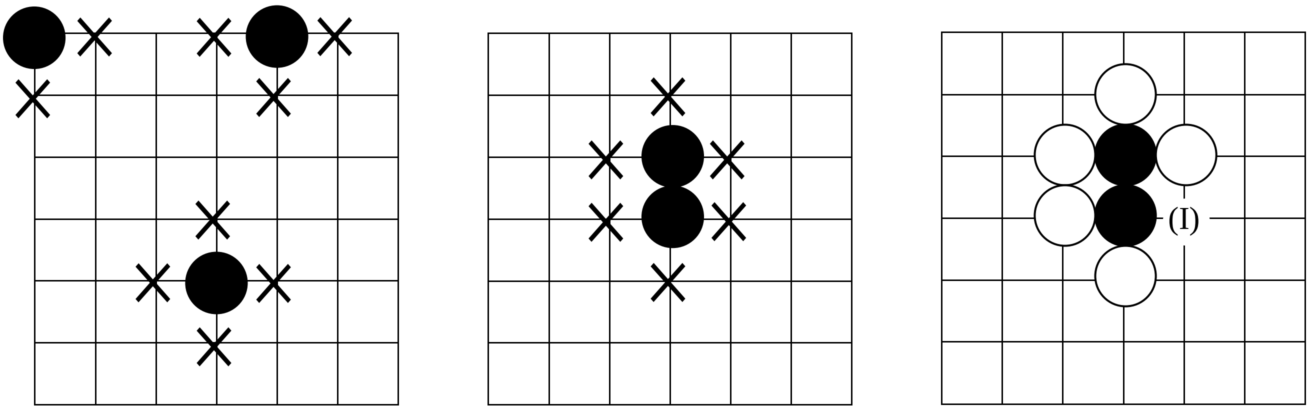
圍棋的棋子分為白子及黑子，執黑子的黑方先下，輪流下子，每次只能下一子，下子的地方為棋盤上線與線的交叉點。

(2). 佔地多者勝

圍棋是爭地的遊戲，哪一方圍的地域大誰就是勝方。圍棋棋盤上共有三百六十一個交叉點，一盤棋的勝負就是由對局雙方所佔據的交叉點的多少所決定的，更精確地說就是雙方活棋所佔據的地域大小來決定的。一個交叉點為一子，雙方各以一百八十又二分之一為基本數，超過此數者為勝，不足者為負。

(3). 氣盡提取

棋子落在棋盤上後，與棋子相鄰的空點稱之為「氣」，如圖 1.3(a)，打 X 處即為黑子的氣；當相同顏色的棋子相連在一起，則彼此的氣就共用，如圖 1.3(b)，兩顆黑子共有打 X 處所標示的六氣；沒有氣的棋子是沒有生命力的，也不允許存在棋盤上，因此一旦棋盤上的棋子處於無氣狀態，則可以提掉，如圖 1.3(c)，黑子被白子包圍，黑方只剩下(I)處一氣，白方只要在下一子在(I)處即可將兩顆黑子提掉。

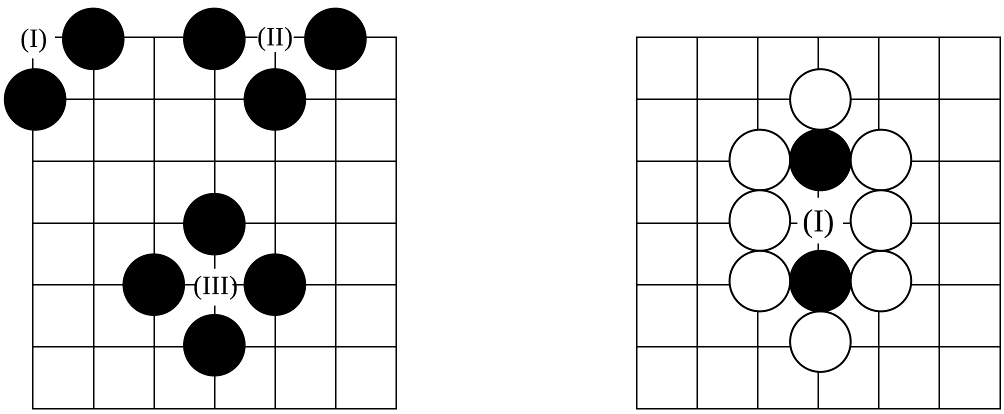


(a)　(b)　(c)

圖 1.3 棋子的氣

(4). 禁著規則

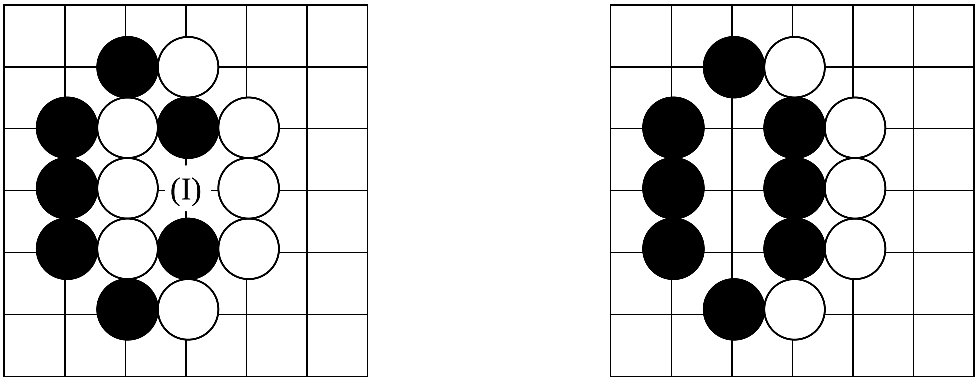
在圍棋裏，下在周圍沒有氣，並且又不能吃掉對方棋子的地方，都稱為「禁著點」。如圖 1.4(a)所示，棋盤上標示(I)、(II)及(III)處的空地被黑棋包圍，當白子落在這些空地時，會造成沒有氣的情況，因此對白方來看為禁著。圖 1.4(b)，兩顆黑子被白子包圍，剩下標示(I)處的一氣，當黑子下在此處時，會造成零氣的情況，因此對黑方來看也為禁著。



(a)　(b)

圖 1.4 圍棋的禁著

但下在周圍沒有氣，卻可以吃掉對方棋子的地方，為禁著的例外。圖 1.5(a)所示，黑子下在標示(I)處會造成此處的黑棋零氣，但是卻可以提吃掉三顆白子成為圖 1.5(b)的結果，因此(a)中標示的(I)處不為黑方的禁著。

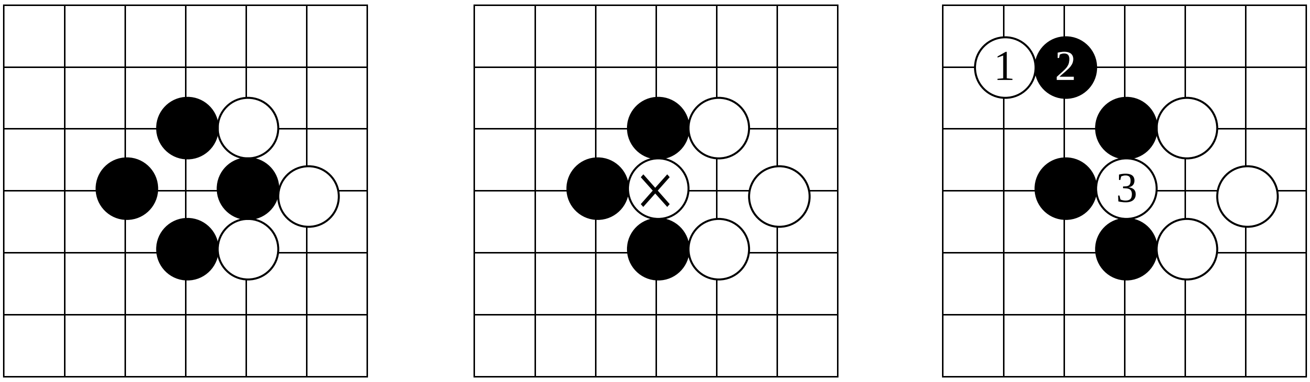


(a) (b)

圖 1.5 禁著的例外

(5). 打劫的規則

相互可以提掉對手的一個棋子的棋型稱之為「打劫」。被提吃的一方，必須至少隔一手才能提回來。圖 1.6(a)所示，此時黑方剛提吃了一顆白子，會形成一個輪白方叫吃一顆黑子的棋型，如果此時白棋再將黑子提吃回來，如圖 1.6(b)，又會形成原本的情況，輪黑方叫吃一顆白子的棋型，若雙方互不相讓地反覆提來提去，則將永無休止，棋局將會受到阻礙。因此為了消除這種困擾，規定在打劫的情況下，被提吃的一方不得立即回提，需要在他處下一子後，輪到該方下子時才可以提吃回來。如圖 1.6(c)所示，黑方剛提吃了一顆白子後，白方先下一手在其他的位置(1)，假使黑方下在位置(2)，白方此時才可將劫提回來，下在(3)的位置。



(a)　(b)　(c)

圖 1.6 打劫的規則

第三節　論文架構

本篇論文共分為四章。第二章介紹打劫問題的定義與描述，並且探討了之前的研究成果，還有我的研究動機。接下來的第三章為本論文的主體，在單一劫爭為本劫的條件下，將打劫過程中所有可能發生的情況都納入考慮，研究本劫最佳的打劫策略，最後並探討了有價值棋步循環的問題。在本劫的使用上，以求獲得最大或是損失最小的結果。依據探討的結果，我們可以得到一個 linear time 的演算法，快速的決定下一步的最佳策略。第四章進一步討論在單一劫爭為本劫，考慮使用損劫的條件下的情況，目前已找出損劫是否使用的條件判斷式，但此部分尚未完全的證明出來。第五章則是結論與未來的研究方向。

第二章　打劫問題與文獻探討

第一節　打劫問題的定義與描述

給定一個已知的劫爭盤面，先對棋盤上的落子分布進行分析，盤面分析後得到劫爭的價值、雙方目前的劫材總數及其價值、有價值棋步的價值。對於劫爭問題，我們輸入的資料為劫爭價值、雙方的劫材、有價值棋步；輸出為雙方在此劫爭中能獲得的最佳利益、雙方使用劫材及取得有價值棋步的時機。打劫問題架構如圖 2.1 所示。

圖 2.1 打劫問題結構圖

針對打劫這個局部的戰爭，我們不考慮先前的盤勢以及雙方之前的利益，只對目前的盤面做處理，因此做了以下的假設：

- 所有的棋步價值是可以量化的。
- 提劫與消劫不會產生或是改變劫爭的價值、劫材及有價值棋步的數量及價值。
- 劫材的使用不會產生或是改變劫爭的狀態與價值、劫材及有價值棋步的數量及價值。

- 有價值棋步的使用不會產生或是改變劫爭的狀態與價值、劫材及有價值棋步的數量及價值。

第二節　文獻探討

2003 年，國立台灣師範大學資訊工程所黃士傑的碩士論文《電腦圍棋打劫的策略》[9]首先對劫爭問題進行了研究。他在論文中對於本劫的問題進行討論，考慮在沒有損劫的情況下訂定了一套策略，也詳細的探討了劫材的運用。首先透過棋步價值的定義，進而定義了劫爭、劫材及有價值棋步的價值，接著詳細的描述了劫材的種類，根據劫爭和劫材的價值來探討使用策略。隨後利用打劫的流程圖導出黑白雙方的利益差，根據 MiniMax 搜尋的原則來推導了使用劫材的條件，再透過這些條件來判斷雙方的劫材個數，直到檢查出雙方在劫爭中能夠獲得之利益。

在[9]中，首先分別定義參數：劫爭價值 k、黑白方劫材 b_i 和 w_i、有價值棋步 $X=(x_1,x_2,x_3,\ldots),x_1\geq x_2\geq x_3\ldots>0$、$X_{even}=x_2+x_4+x_6+\ldots$、$X_{odd}=x_3+x_5+x_7+\ldots$。以及雙方劫材價值下限 BKTVL 和 WKTVL，來判斷劫材是否使用。接著根據白方七種下法來決定黑方最佳的下一步，其中最關鍵的部份在於找劫材時的策略，檢查雙方的劫材分布來決定下一步，在三種分布中，設定雙方劫材價值的下限，然後可得到雙方符合條件的劫材數 m 和 n，以判別是否屬於目前檢查的劫材分布；雙方的劫材分布分為以下三種：

分布一.我方(黑方)一定能取得大於或等於 $k+X_{odd}-(x_1+X_{even})$ 的利益

$BKTVL=2(k+X_{odd}-X_{even})$

$WKTVL=2x_1+1$

若 $m>n$ 就符合此種分布，則黑方下 b_1。若不符合，則檢查劫材分布二。

分布二.我方一定取得大於或等於零的利益

將 BKTVL 與 WKTVL 一個遞增一個遞減的設定，依序檢察雙方的劫材數。

如以下 pseudo code：

```
for(i=1;i≦k+Xodd-(x1+Xeven);i++)
{
    BKTVL=[x(k+Xodd-Xeven)]-i;
    WKTVL=(2x1+1)+i;
    (求得黑方白方符合條件的劫材數分別為 m,n);
    if(m>n)   break;
}
```

檢查過程中只要符合 m>n，跳出迴圈後下 b_1。若不符合，則檢察劫材分布三。

分布三.我方一定遭受損失

$BKTVL=k+x_1+X_{odd}-X_{even}$

$WKTVL=k+x_1+X_{odd}-X_{even}+1$

若 m≦n 就符合此種分布。比較 x_1 與 b_u-x_1，若前者不小於後者就下 x_1，否則下 b_u。(b_u 為小於劫材價值下限的劫材中，價值最大的那一個)

[9]中用流程圖(圖 2.2)來表示打劫的過程，在這個模擬打劫的流程圖模組裡，分析每個分支最後的利益差，bottom-up 後分別判斷黑白雙方符合劫材價值下限的劫材個數，以計算出在劫爭中能得到的最大利益，並且針對打劫過程中雙方的應手，訂出了使用劫材的順序或是消劫的決定等。

但是在此打劫的過程中，由於在許多地方是用很直觀的方法來決定策略，而未能考慮到所有獲得更大利益的情況，因此有一些情況並不能取得到最佳解。

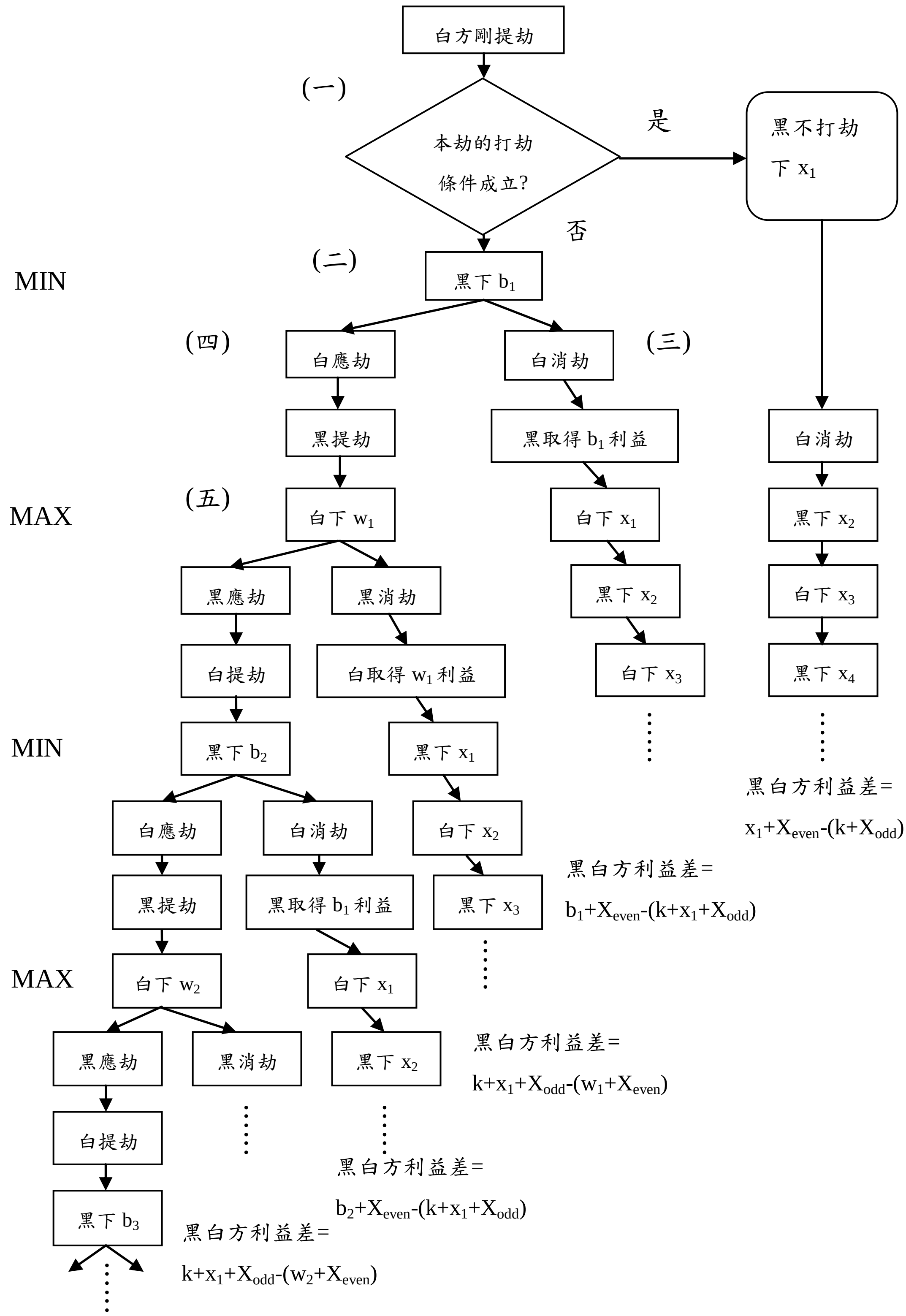

白方剛提劫
(一)
本劫的打劫
條件成立?
是
黑不打劫
下 x_1
否
(二)
MIN
黑下 b_1
(四)
白應劫
白消劫
(三)
黑提劫
黑取得 b_1 利益
白消劫
MAX
(五)
白下 w_1
白下 x_1
黑下 x_2
黑應劫
黑消劫
黑下 x_2
白下 x_3
白提劫
白取得 w_1 利益
白下 x_3
黑下 x_4
MIN
黑下 b_2
黑下 x_1
黑白方利益差=
$x_1+X_{even}-(k+X_{odd})$
白應劫
白消劫
白下 x_2
黑白方利益差=
黑提劫
黑取得 b_1 利益
黑下 x_3
$b_1+X_{even}-(k+x_1+X_{odd})$
MAX
白下 w_2
白下 x_1
黑應劫
黑消劫
黑下 x_2
黑白方利益差=
$k+x_1+X_{odd}-(w_1+X_{even})$
白提劫
黑白方利益差=
$b_2+X_{even}-(k+x_1+X_{odd})$
黑下 b_3
黑白方利益差=
$k+x_1+X_{odd}-(w_2+X_{even})$

圖 2.2 打劫的流程圖[9]

接下來的研究成果是在 2007 年由國立台灣師範大學資訊工程所林玉祥所提出，在他的碩士論文《電腦圍棋中考慮使用損劫之打劫策略研究》[5]中，除了考慮本劫之外，另外再延伸，考慮了使用損劫的情形。損劫也是圍棋實戰中常見的一種劫材，使用了這種劫材，在對方應劫後，我方會遭受到損失，因此損劫的使用將使劫爭的問題複雜化了許多。與[9]相同的首先透過棋步價值的定義，進而定義了劫爭、劫材及有價值棋步的價值，除此之外還定義了劫材的損值，根據劫爭以及雙方劫材價值的分布情形來討論使用的策略。由 MiniMax 搜尋的策略原則來推論雙方使用劫材的條件，隨後利用利益窮舉的方法來判斷最大可以獲得的利益。

在[5]中，首先分別定義了參數：劫爭價值 k、黑白方劫材 b_i 和 w_i(包含劫材價值和劫材損值)、有價值棋步 $X=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$，$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \ldots > 0$、雙方劫材價值下限 BKTVL 和 WKTVL 、雙方使用劫材的累積損值 B_damage 和 W_damage、勝劫方在此劫爭中能夠獲得的最大利益 MaxProfit、目前檢查是否可以得到的利益 profit 以及表示雙方各是否找到符合條件的劫材 B_find 和 W_find(0 表示未找到符合條件的劫材,1 表示找到符合條件的劫材)等。接著設定檢查的利益範圍 profit = MaxProfit 到-(MaxProfit-1)，開始測試可以獲得的最大利益，並且找出白方提劫後黑方最佳的下一步。黑方使用一個符合條件的劫材，白方接下來找一個符合條件的劫材與之對應，在每回合的劫材對應中測試是否可以得到當前的最大利益。此處最重要的是在於每回合測試的時候要同時的調整劫材價值下限和劫材損值的上限，並且要累積目前使用劫材的損值(B_damage 和 W_damage)，符合下列條件的劫材才會考慮使用：

B[i][0](黑方劫材價值) ≧ BLTVL+(B_damage–W_damage)

B[i][1](黑方劫材損值) ≦ MaxProfit–profit+ (W_damage-B_damage)

W[j][0] (白方劫材價值) ≧ WKTVL+(W_damage–B_damage)

W[j][1] (白方劫材損值) < MaxProfit+profit+(B_damage-Wdamage)

接下來針對雙方是否找到符合條件的劫材，分成以下四種情況(表 2.1)：

表 2.1 劫材判斷對應表[5]

	B_find	W_find
甲	1	1
乙	1	0
丙	0	1
丁	0	0

甲. 雙方都找到符合條件的劫材，因此繼續尋找雙方是否還有其它滿足條件且尚未使用的劫材來接應。

乙. 白方找不到接應黑的劫材，黑方可得到目前的檢查利益 profit，黑下第一個符合條件的劫材，程式結束。

丙. 黑方找不到符合條件的劫材，白方尚有符合條件的劫材可以接應，檢查下一個利益。

丁. 黑方找不到符合條件的劫材，雖然白方也找不到劫材，但由於白方先提劫，因此黑方必須先找劫材的關係，黑方無法得到目前的檢查利益 profit，檢查下個利益。

[5]中用流程圖(圖 2.3)來表示完整的演算流程，在這個演算流程下，利用利益窮舉的方式，找出在考慮使用損劫的條件下可以獲得的最大利益，以及選擇正確的劫材來進行打劫。在損劫的損值相同時能夠迅速的獲得最佳解，而損劫不同時，可以透過此演算法來搜尋，能夠在 7 分鐘左右處理雙方各 16 個劫材的數量。

但由於解題的方法是利用利益窮舉的搜尋方式，因此會造成在劫材個數變多時，搜尋的時間會急遽的上升；並且尚未能找出當損劫之損值不同時的打劫策

略，因此我們也會對損劫做處理。

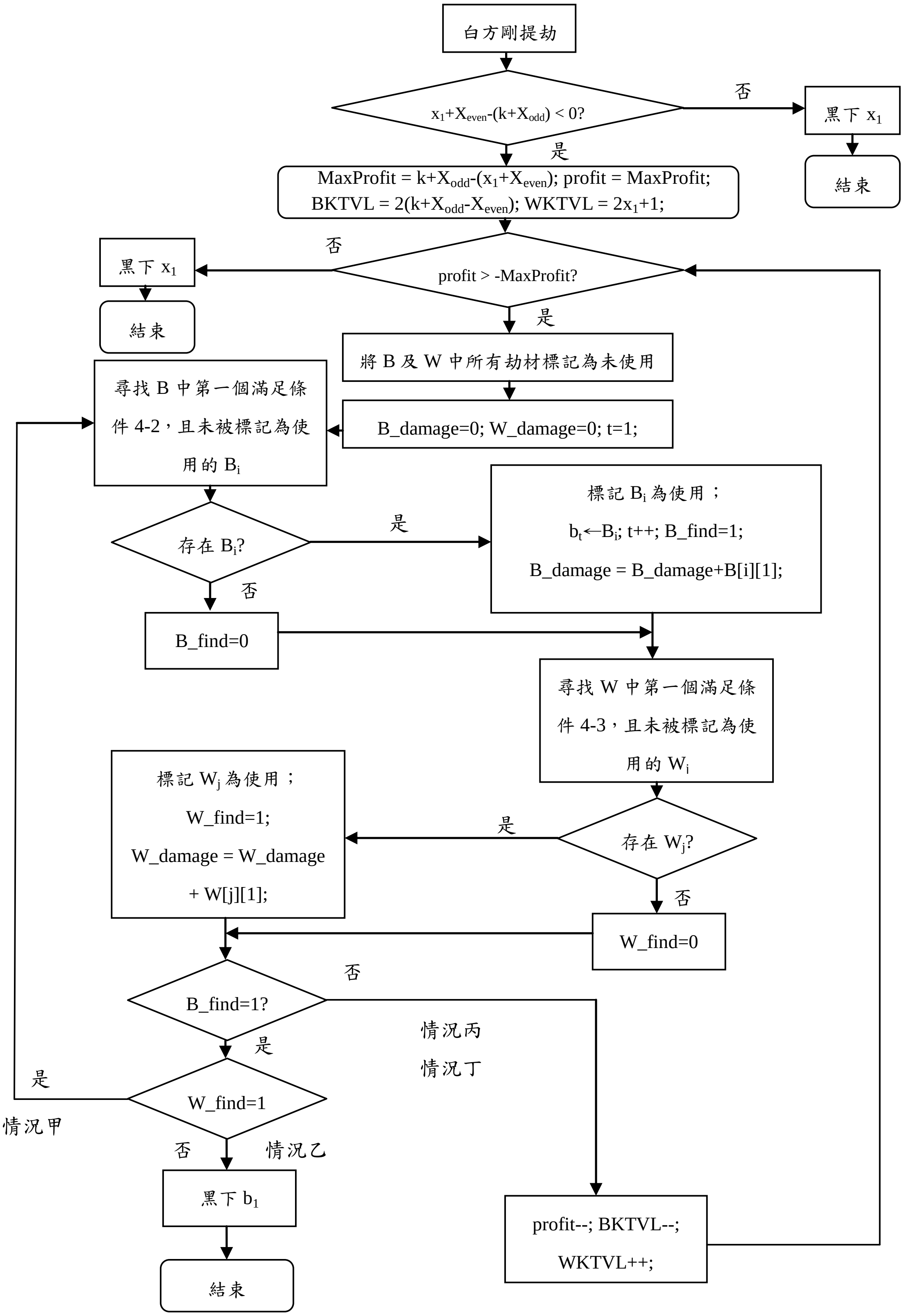


圖 2.3 損劫演算流程圖[5]

第三節　研究動機

在圍棋的對局中，劫爭隨處可見，甚至到每局都必產生打劫的情況，尤其是在棋力高強的棋手對弈中，甚至會出現動輒數十手或是數百手的大劫爭，因此打劫問題是圍棋技藝中重要的一部分。

人類的圍棋對局裏，一般在優勢的情況下，會較保守的穩扎穩打，無須挑起劫爭；而在劣勢的情況下，挑起劫爭，以求劫裡逃生，獲取較大的利益企圖扭轉戰局。但是未善加斟酌，而貿然打劫或是逃避打劫，都可能會讓居於劣勢的一方逆轉戰局。因此，我們在思考這個打劫問題時，不考慮打劫前的局勢以及雙方的利益差，我們探討的目標是在此局部的劫爭當中，在理想的情況下應該如何獲取最大的利益，進而求出最佳解。

由於先前的研究加入了知識導向的因素在，在直觀的定義下並未能考慮到所有可能獲得更大利益的情況，尚未能判定為最佳。因此本論文為了能夠得到最佳的利益，需要將全部的可行著手都列入考量，分別的進行討論、證明各個分支，最後再來推廣，希望藉此得到最佳的利益以及最佳的手順。

第三章　單一劫爭的打劫策略-本劫

第一節　解題方法

本劫是各種劫爭中最單純、最簡單，也是最重要的一種，據統計，本劫在圍棋對局的打劫中，佔了 90%以上的高比例，其他種類的劫爭，都是本劫的延伸與複雜版本，因此我們由本劫的問題開始討論。

我們重新探討在本劫的條件下並且盤面為單一劫爭的打劫策略，首先我們在打劫的過程中，將所有可能發生的情況都納入考慮，來確保不會發生可能獲得更大利益的情況被忽略。因此，在每個情況下都必須考慮到提劫、消劫、應劫、取得有價值棋步價值、黑方或白方使用劫材及黑方或白方取得劫材價值這六個選擇。利用 MiniMax[1]的搜尋原則搭配圍棋的規則建構出打劫的流程圖。接下來利用 bottom up[2]的方法來比較利益差，將不可能走到的分支砍掉，來找到決策的判斷式，由此我們可以得到在不同劫爭價值、有價值棋步、雙方劫材下我們最佳的決策。最後再討論了有價值棋步循環的問題，當某一方在劫材具有絕對優勢的情況下，可以使用劫材來換取有價值棋步，進而獲得更大的利益，我們得到一個遞迴的條件式來決定是否要進行有價值棋步循環的交換。由此，我們成功地獲得本劫的最佳策略。

首先我們定義起始盤面及策略中所用到的參數；起始盤面設定為黑方造劫開始，而白方為先手方。這裏所說的造劫可能是黑方刻意造的，也有可能是黑方不小心形成的劫型，我們由此開始討論是因為考慮到劫爭最早形成的情況，白方可以選擇提劫或是取得有價值棋步的價值。

所使用到的參數為：

(1). k 代表劫爭價值，$k > 0$。

(2). 黑方劫材 $b_1 \ldots b_m$，$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m > 0$；接下來的討論裏，為了討論的方便，我們皆用 b_1，來代稱黑方劫材 $b_1 \ldots b_m$。

(3). 白方劫材 $w_1 \ldots w_n$，$w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n > 0$；接下來的討論裏，為了討論的方便，我們皆用 w_1，來代稱白方劫材 $w_1 \ldots w_n$。

(4). 盤面上的有價值棋步 $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$，$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots > 0$。

(5). x_{u+1} 為目前盤面上最大的有價值棋步。

(6). $X_{even} = x_{u+2} + x_{u+4} + x_{u+6} + \ldots$，$X_{even}$ 為目前盤面上最大有價值棋步之後的所有偶數項有價值棋步價值的總合。

(7). $X_{odd} = x_{u+3} + x_{u+5} + x_{u+7} + \ldots$，$X_{odd}$ 為目前盤面上最大有價值棋步之後的所有奇數項有價值棋步價值的總合。

(8). 白黑利益差為白方所得到的利益減去黑方所得到的利益。

(9). 黑白利益差為黑方所得到的利益減去白方所得到的利益。

首先在本章中，先預設雙方都未使用損劫，考慮損劫的情況，留在下一章討論。我們由本章第二節到第五節都先不討論有價值棋步循環的問題，將此問題保留到第六節討論。第二節先從最簡單的情況開始討論，假設盤面上只有數個有價值棋步，沒有劫材的情形，第三節探討了單方面一個劫材的情況，第四節討論了單方面多個劫材的情況，第五節為雙方面多個劫材的情況，最後第六節討論了有價值棋步循環的情況。

注意：在本論文中，為了簡潔起見，決策樹左右二分支的條件通常一邊是「>」，另一邊是「<」。當相等時，兩個分支均可以走，效果是一樣的，因此在決策樹中先不考慮等號的情形。

第二節　沒有劫材的情況

在假設雙方沒有劫材的情況下，盤面上的利益只剩下劫爭的價值及有價值棋步。針對不同有價值棋步個數的情況做以下分析，我們可以得到在不同的劫爭價值及有價值棋步下，劫爭落在不同的有價值棋步的區間，雙方該如何取得最佳的利益：

(1). 只有一個有價值棋步：如圖 3.1 所示，黑方造劫後，白方可以選擇提劫或是取得有價值棋步 x_1，因此我們可以藉由兩個分支的白黑利益差來找出白方最佳的著手。白方選擇提劫得到的白黑利益差為 $k-x_1$，白方選擇先取有價值棋步 x_1 得到的白黑利益差為 x_1-k。因此可以找出 $k>x_1$ 時白方會選擇左邊的分支選擇提劫，$k<x_1$ 時白會選擇右邊的分支先取 x_1，當 $k=x_1$ 時白方選擇提劫或是取有價值棋步 x_1 利益是相同的，因此等號的情形就先不討論。

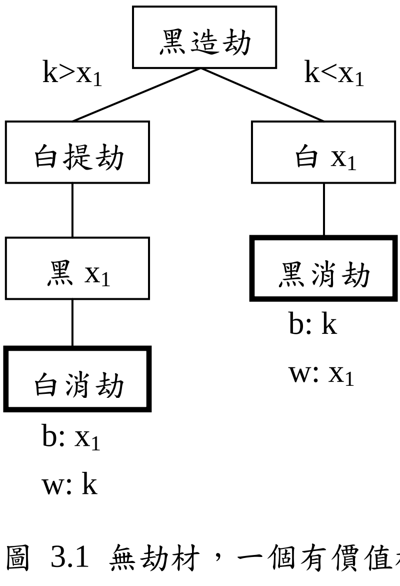


圖 3.1 無劫材，一個有價值棋步

(2). 恰有二個有價值棋步：我們與先前的方法相同，由最底層的第一個分支開始討論。圖 3.2 所示，虛線(I)標示的子樹中，比較白方選擇消劫或是白方選擇取得有價值棋步 x_2 的白黑利益差，可以得知：

- $k>x_2$　白方會選擇消劫
- $k<x_2$　白方會取得有價值棋步 x_2

而虛線(II)標示的子樹中，也利用相同方法可以得知：

- $k>x_2$　黑方會選擇消劫
- $k<x_2$　黑方會取得有價值棋步 x_2

得到兩個子樹的條件式後，將所得到的兩個條件式再繼續 bottom up 到上一層，針對 $k>x_2$ 與 $k<x_2$ 進行討論：

(a). 當 $k>x_2$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 k，黑方利益為 x_1+x_2。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 x_1+x_2，黑方利益為 k。

因此在 $k>x_2$ 的條件下，白方選擇左邊的分支，白黑利益差為 $k-x_1-x_2$；白方選擇右邊的分支，白黑利益差為 x_1+x_2-k，將兩個條件式比較後得到：

- $k>x_1+x_2$　白方會走左邊的分支
- $k<x_1+x_2$　白方會選擇右邊的分支

(b). 當 $k<x_2$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 x_2，黑方利益為 $k+x_1$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $k+x_1$，黑方利益為 x_2。

在 $k<x_2$ 的條件下，可以發現白方所抉擇的是取得 x_2 的利益或是取得 $k+x_1$ 的利益。根據已知條件 $x_1 \geq x_2$，得到 $k+x_1$ 必定大於 x_2，白必定選擇右邊的分支，取得有價值棋步 x_1，因此圖 3.2(I)中，右邊的分支就可以砍掉。

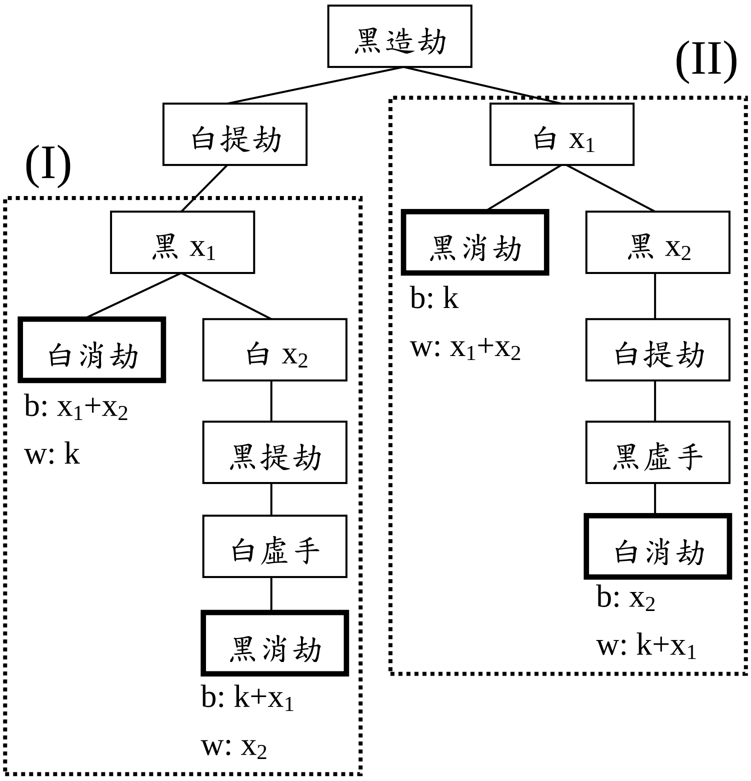


圖 3.2 無劫材，二個有價值棋步

利用此方法我們可以得到圖 3.3，當劫爭在不同有價值棋步的區間時，雙方會如何的取得劫爭價值及有價值棋步。

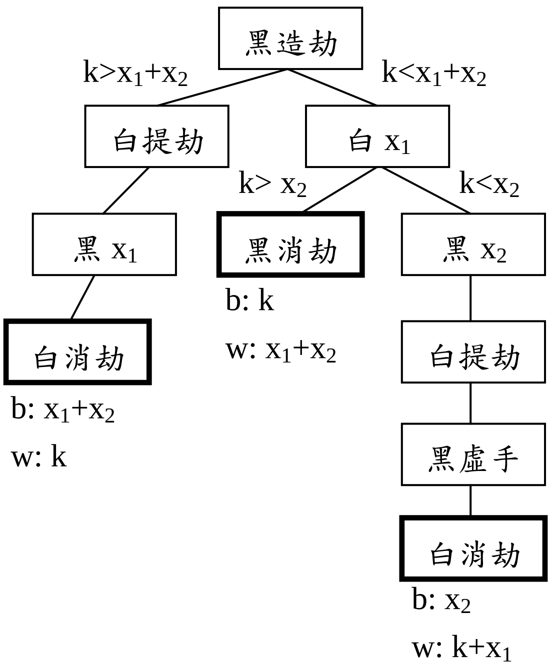


圖 3.3 無劫材，二個有價值棋步砍完後

(3). 恰有三個有價值棋步：圖 3.4 所示，我們先分別討論子樹(I)及子樹(II)，利用先前的方法得到兩子樹的決策圖(圖 3.5)，將所得到的條件式再繼續 bottom up 到上一層，針對三個有價值棋步區間 $k>x_2$、$x_2>k>x_3$ 及 $k<x_3$ 進行討論：

(a). 當 $k>x_2$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 $k+x_3$，黑方利益為 x_1+x_2。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 x_1+x_2，黑方利益為 $k+x_3$。

在 $k>x_2$ 條件下，白方選擇左邊的白黑利益差為 $k+x_3-x_1-x_2$，白方選擇右邊的白黑利益差為 $x_1+x_2-k-x_3$，將兩個條件式比較後得到：

- $k>x_1+x_2-x_3$ 白方會走左邊的分支
- $k<x_1+x_2-x_3$ 白方會走右邊的分支

(b). 當 $x_2>k>x_3$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 x_2+x_3，黑方利益為 $k+x_1$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $k+x_1$，黑方利益為 x_2+x_3。

因為 $x_1 \geq x_2$，並且由已知條件 $k>x_3$，可以得到 $k+x_1$ 必定大於 x_2+x_3。所以在 $x_2>k>x_3$ 的條件下，白方必定會選擇右邊的分支，白取得有價值棋步 x_1，因此以 $x_2>k>x_3$ 為條件，往左走的分支可以砍掉。

(c). 當 $k<x_3$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 $k+x_2$，黑方利益為 x_1+x_3。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 x_1+x_3，黑方利益為 $k+x_2$。

因為 $x_1 \geq x_2$，並且由已知條件 $k<x_3$，可以得到 x_1+x_3 必定大於 $k+x_2$。所以在 $k<x_3$ 的條件下，白方必定會選擇右邊的分支，白取得有價值棋步 x_1，因此以 $k<x_3$ 為條件，往左走的分支可以砍掉。

經由以上三個 case 的討論，我們將不會走到的分支砍掉，可以得到當劫爭在不同有價值棋步區間時，雙方會如何取得劫爭價值及有價值棋步的條件式，如圖 3.6 所示。

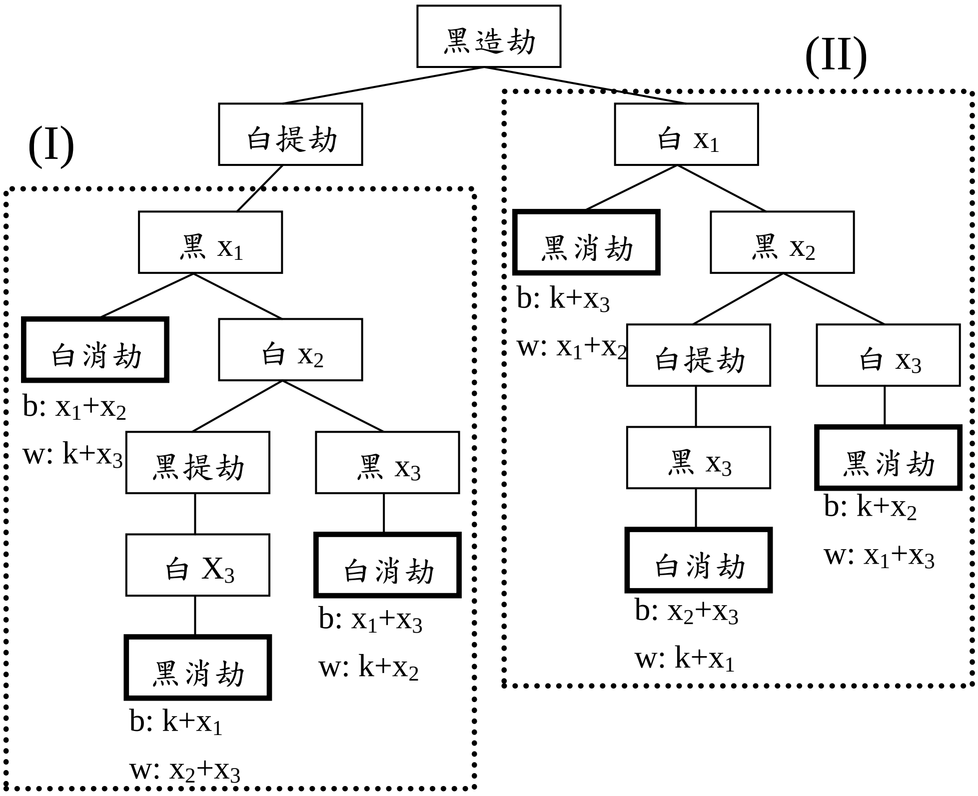
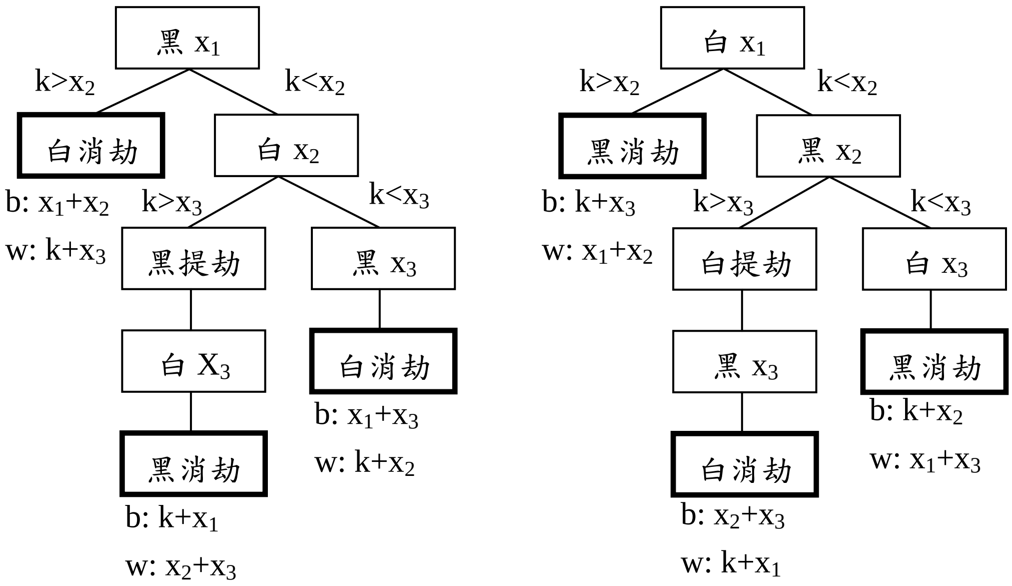


圖 3.4 無劫材，三個有價值棋步



(I) (II)

圖 3.5 無劫材，三個有價值棋步

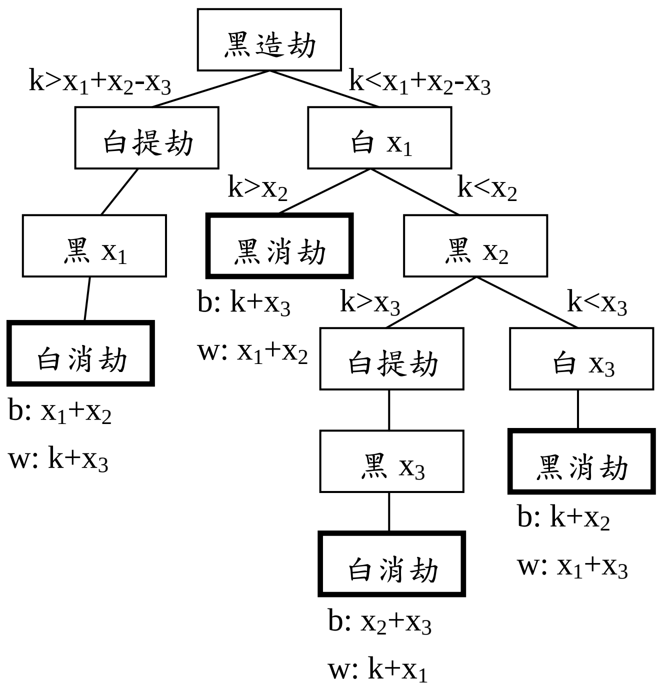


圖 3.6 無劫材，三個有價值棋步砍完後

(4). 恰有四個有價值棋步

如圖 3.7 所示，我們利用相同的方法將子樹(I)、(II)利用黑白利益差及白黑利益差的判斷，找出條件式(圖 3.8)，再 bottom up 到上一層，針對所找到的 4 個條件式，$k>x_2+x_4$、$x_2+x_4>k>x_3+x_4$、$x_3+x_4>k>x_4$ 及 $k<x_4$ 做判斷比較：

(a). 當 $k>x_2+x_4$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 $k+x_3$，黑方利益為 $x_1+x_2+x_4$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $x_1+x_2+x_4$，黑方利益為 $k+x_3$。

在 $k>x_2+x_4$ 條件下，將白方選擇左邊分支或右邊分支的兩個白黑利益差比較後，可以得到：

- $k>x_1+x_2-x_3+x_4$　白方會走左邊的分支
- $k<x_1+x_2-x_3+x_4$　白方會走右邊的分支

(b). 當 $x_2+x_4>k>x_3+x_4$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 $x_2+x_3+x_4$，黑方利益為 $k+x_1$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $k+x_1$，黑方利益為 $x_2+x_3+x_4$。

因為 $x_1 \geq x_2$，並且由已知條件 $k>x_3+x_4$，可以得到 $k+x_1$ 必定大於 $x_2+x_3+x_4$。所以在此條件下，白方必定會選擇右邊的分支，白取得有價值棋步 x_1。因此以 $x_2+x_4>k>x_3+x_4$ 為條件，往左走的分支可以砍掉。

(c). 當 $x_3+x_4>k>x_4$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 $k+x_2$，黑方利益為 $x_1+x_3+x_4$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $x_1+x_3+x_4$，黑方利益為 $k+x_2$。

因為 $x_1 \geq x_2$，並且由已知條件 $x_3+x_4>k$，可以得到 $x_1+x_3+x_4$ 必定大於 $k+x_2$。所以在此條件下，白方必定會選擇右邊的分支，白取得有價值棋步 x_1。因此以 $x_3+x_4>k>x_4$ 為條件，往左走的分支可以砍掉。

(d). 當 $k<x_4$ 時

若白方選擇左邊的分支白提劫：白方利益為 x_2+x_4，黑方利益為 $k+x_1+x_3$。

若白方選擇右邊的分支白取 x_1：白方利益為 $k+x_1+x_3$，黑方利益為 x_2+x_4。因為 $x_1 \geq x_2$，並且 $x_3 \geq x_4$，可以得到 $k+x_1+x_3$ 必定大於 x_2+x_4。所以在此條件下，白方必定會選擇右邊的分支，白取得有價值棋步 x_1。因此以 $k<x_4$ 為條件，往左走的分支可以砍掉。

經由以上四個 case 的討論，將不會走到的分支砍掉，可以得到當劫爭在不同有價值棋步區間時，雙方會如何取得劫爭價值及有價值棋步的條件式，如圖 3.9 所示。

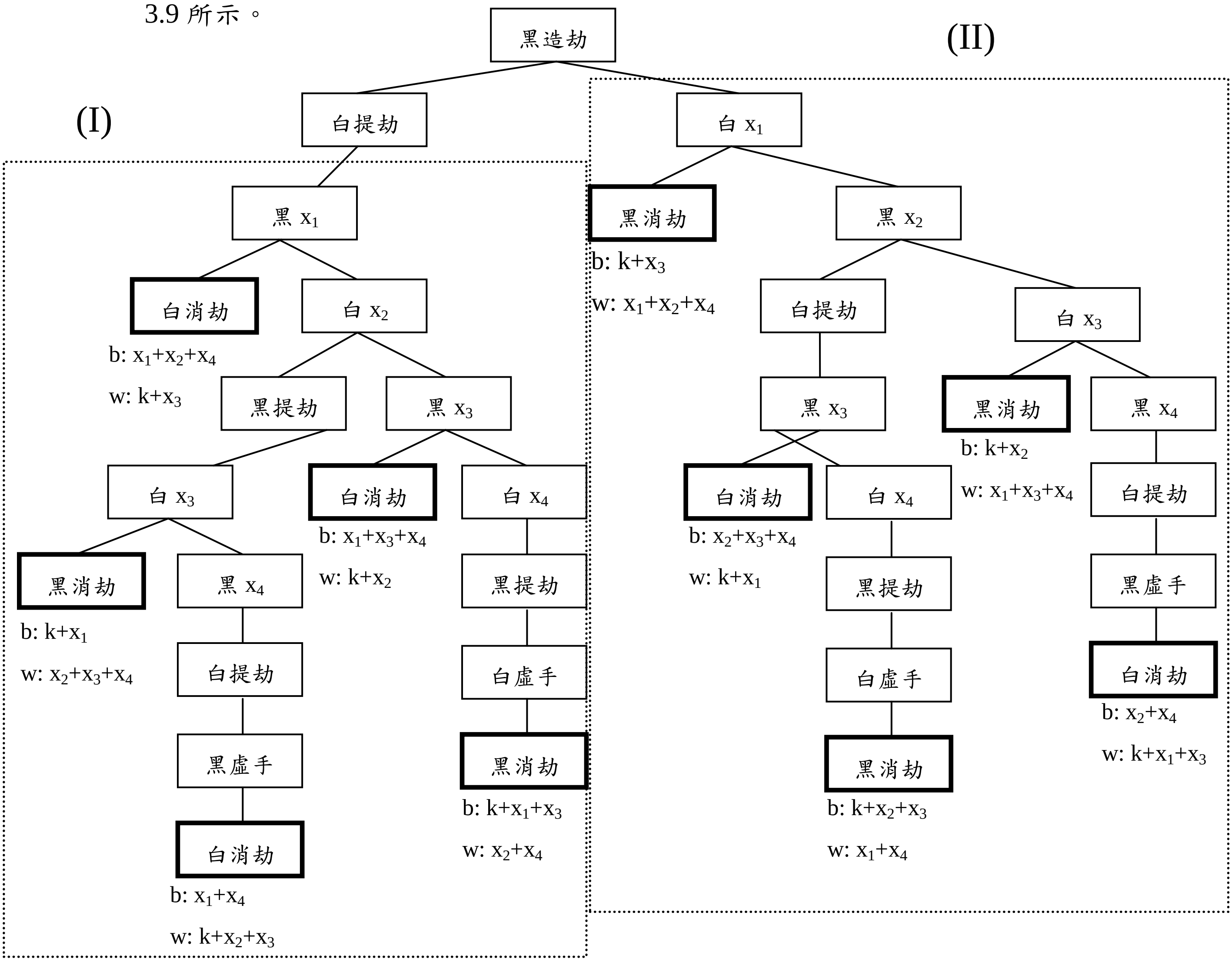


圖 3.7 無劫材，四個有價值棋步

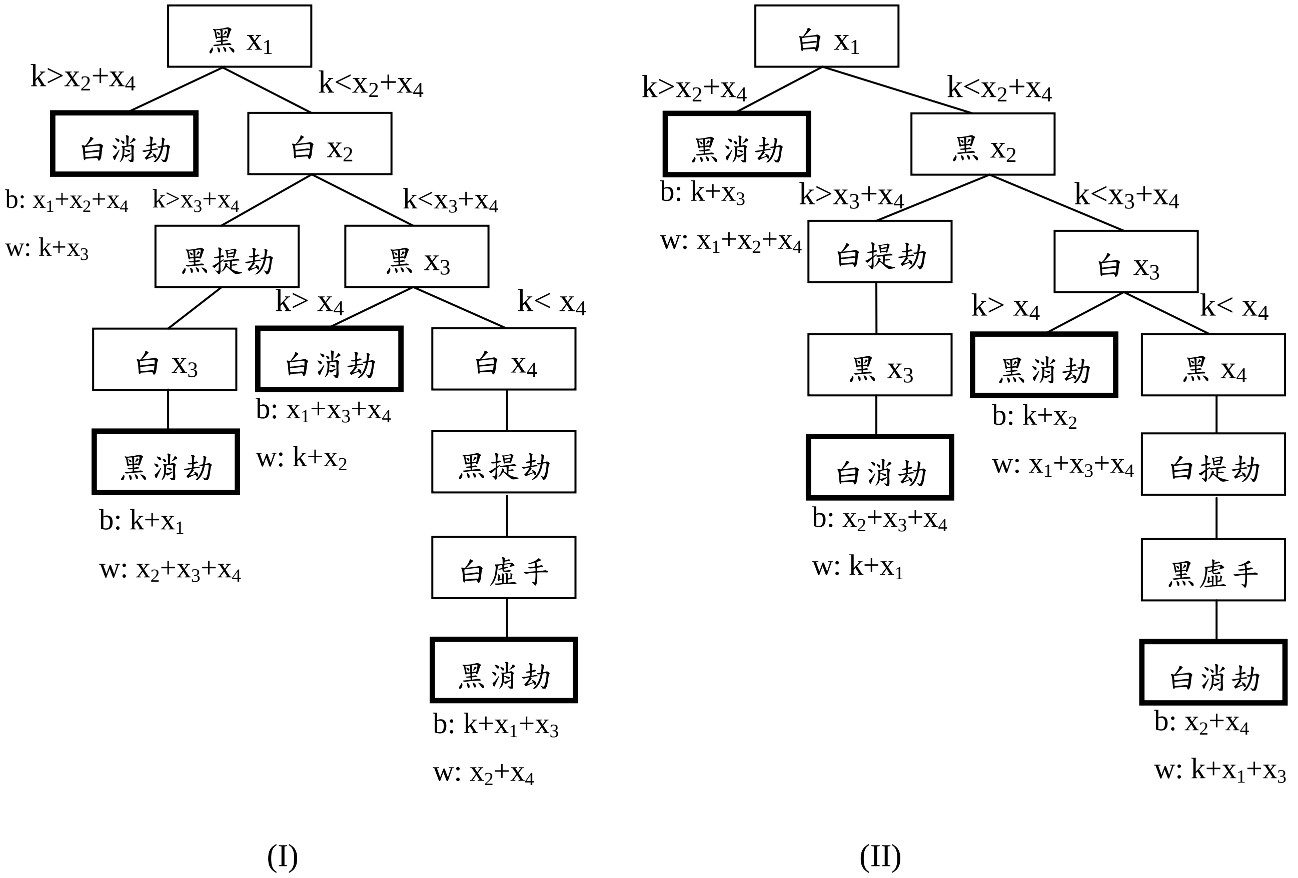


圖 3.8 無劫材，四個有價值棋步

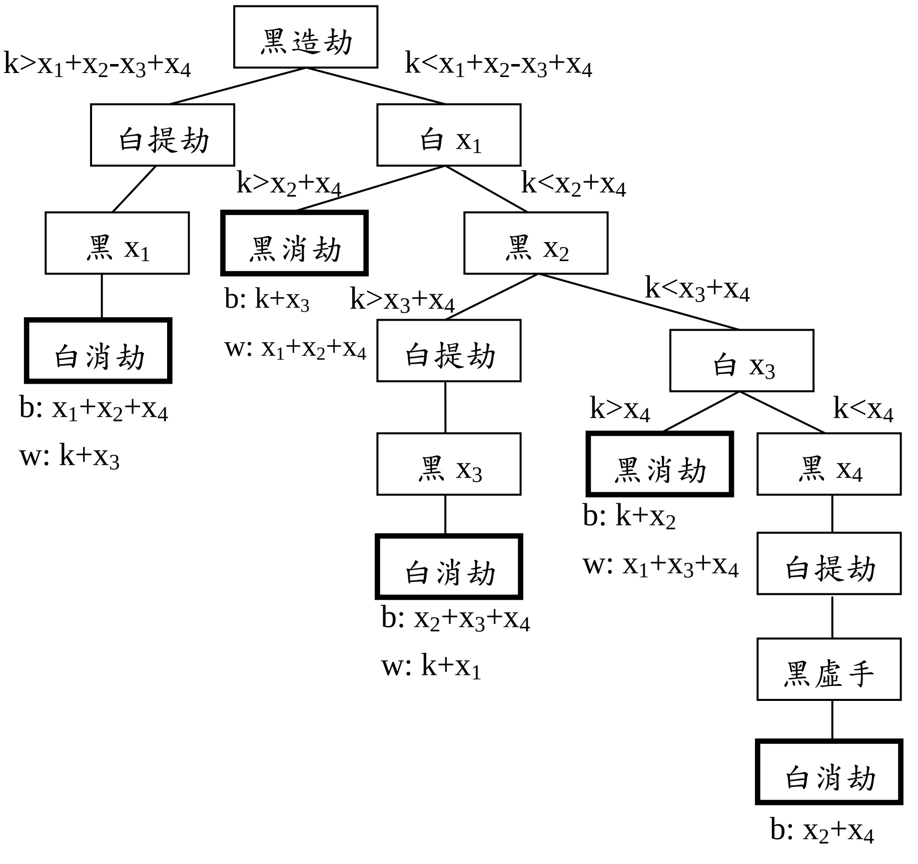
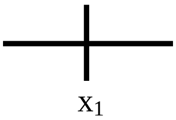


圖 3.9 無劫材，四個有價值棋步砍完圖

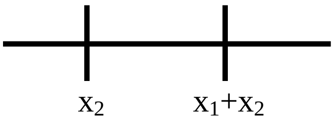
使用相同的方法，我們可以得到無劫材，多個有價值棋步的條件判斷圖。因此我們可以整理發現一些規律，在不同有價值棋步的個數，根據計算各個區間的價值，可以決定劫爭的價值落在不同大小區間時，雙方該如何取得最佳的利益。

不同有價值棋步情況下，各個區間的條件值：(在數軸上，越右邊其值越大)

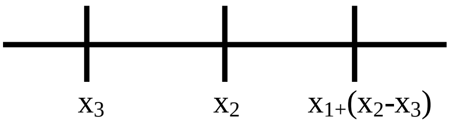
(a). 一個有價值棋步：



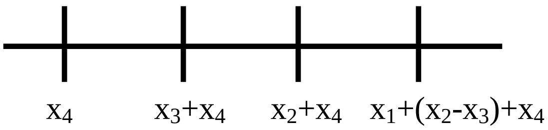
(b). 二個有價值棋步：



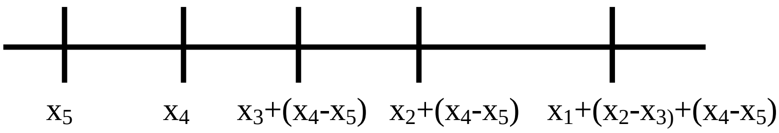
(c). 三個有價值棋步：



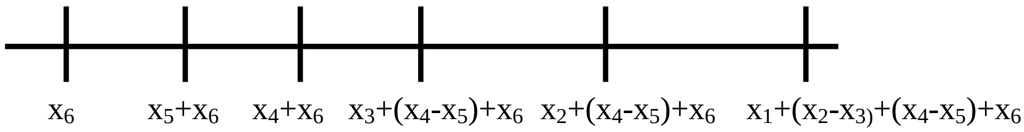
(d). 四個有價值棋步：



(e). 五個有價值棋步：



(f). 六個有價值棋步：



利用以上的整理，我們可以取得建立有價值棋步區間的一個規律，假設我們每個有價值棋步條件區間的首項為 x_t，X_{even} 為在 x_t 之後偶數項的和，X_{odd} 為在 x_t 之後奇數項的和：

(a). 當有價值棋步區間條件的首項(x_t)為奇數時，條件式為首項加上偶數項的和減去奇數項的和，以 $x_t+(X_{even}-X_{odd})$ 表示。

(b). 當有價值棋步區間條件的首項(x_t)為偶數時，條件式為首項加上偶數項的和減去奇數項的和再加回第一項奇數項，以 $x_t+(X_{even}-X_{odd})+x_{t+1}$ 表示。

而有價值棋步區間的使用方式，以六個有價值棋步為例，我們可以將其分為七個有價值棋步區間，由右到左且由大到小分為(I)號到(VII)號區間，如圖 3.10 所示。這些區間中(I)、(III)、(V)、(VII)等我們稱為奇數區間；反之，(II)、(IV)、(VI)則稱為偶數區間。

假設劫爭價值 k 落在(V)號區間，由圖 3.11 表示，白黑雙方會先輪流取有價值棋步，(白取 x_1，黑取 x_2，白取 x_3)。由於(V)號區間介於 x_4+x_6 及 x_5+x_6 之間，因此接下來黑方會取得有價值棋步 x_4，白方會選擇取得劫爭的價值 k，由於白方無法直接選擇消劫，因此白方先提劫，黑方取得有價值棋步 x_5 的價值，接下來白方會消劫，黑方再取得有價值棋步 x_6 的價值。所以白方得到的利益為 $k+x_1+x_3$，黑方得到的利益為 $x_2+x_4+x_5+x_6$。

假設當劫爭價值 k 落在(VI)號區間時，由圖 3.12 表示，白黑雙方先輪流取有價值棋步，(白取 x_1，黑取 x_2，白取 x_3，黑取 x_4)，由於(VI)號區間介於 x_5+x_6 及 x_6 之間，因此接下來白方取得有價值棋步 x_5 後，黑方會選擇取得劫爭價值 k，因為黑方可以直接消劫，所以當黑方消劫後，雙方再輪流將剩下的有價值棋步取完。所以白方得到的利益為 $x_1+x_3+x_5+x_6$，黑方得到的利益為 $k+x_2+x_4$。

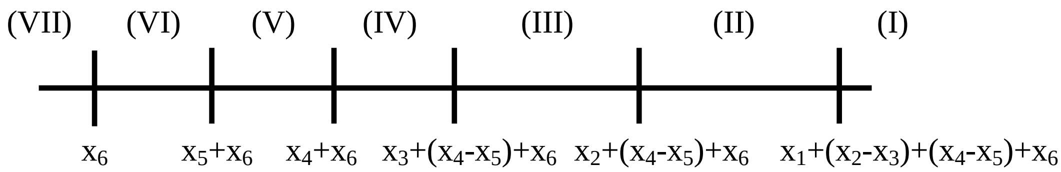


圖 3.10 六個有價值棋步區間圖

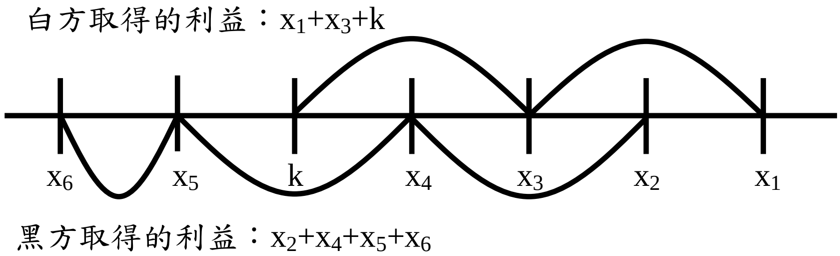


圖 3.11 有價值棋步區間(V)

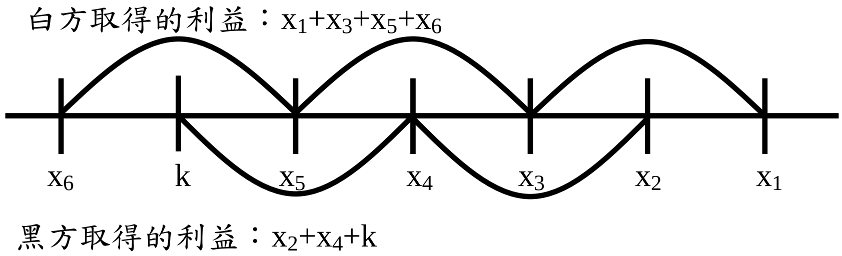


圖 3.12 有價值棋步區間(VI)

由上面兩了例子來看，當劫爭價值 k 落在(V)號區間時，白方會取得劫爭的價值，但是需要花兩手的棋步才可以取得。當劫爭價值 k 落在(VI)號區間時，黑方會取得劫爭的價值，因為起始盤面是黑造劫，因此黑方可以直接消劫，花一手棋就可取得劫爭的價值。

繼續的對不同有價值棋步個數及不同的有價值棋步區間做探討，我們規納出了兩個規則：

(a). 當劫爭價值 k 位於奇數區間時，白方會取得劫爭價值 k，但是白方需要使用兩手才會取得劫爭價值 k。

(b). 當劫爭價值 k 位於偶數區間時，黑方會取得劫爭價值 k，因為起始盤面是黑造劫，因此黑方可以直接花一手取得劫爭價值 k。

由於在此條件下沒有劫材的變數在，所以雙方可以得到的利益一開始就決定。透過有價值棋步區間的建立，找到在無劫材且多個有價值棋步的條件下，雙方最佳的下法。

第三節　單方一個劫材的情況

由於直接的加入多個劫材這個變數，會使問題變得十分複雜，因此我們先對比較簡單情況做討論，亦即單方面一個劫材的情況。首先必須找到可以使用劫材的時機，根據上一節所得到的規則繼續探討。

(1). 討論一：劫爭價值 k 位於有價值棋步的奇數區間

- 假設只有黑方有一個劫材 b_1：

  白方會花兩手取得劫爭價值，因此黑方可以在白方提劫後，使用劫材 b_1 來獲得更大的利益。

- 假設只有白方有一個劫材 w_1：

  白方會花兩手取得劫爭價值，但是由於黑方沒有要取得劫爭價值，因此在此情形下，白方劫材 w_1 沒有用處。

(2). 討論二：劫爭價值 k 位於有價值棋步的偶數區間

- 假設只有黑方有一個劫材 b_1：

  黑方直接消劫，取得劫爭價值，但是由於白方沒有要取得劫爭價值，因此在此情形下，黑方劫材 b_1 沒有用處。

- 假設只有白方有一個劫材 w_1：

  黑方直接消劫，取得劫爭價值，但是由於白方沒有要取得劫爭價值，因此在此情形下，白方劫材 w_1 沒有用處。

經由上面兩點的討論後，我們可以得到只有黑方有一個劫材 b_1 的使用時機。時機為劫爭價值 k 位於有價值棋步的奇數區間時，白方會花兩手取得劫爭價值，但是在白方提劫後，黑方可以使用劫材來獲取更大的利益。我們把使用劫材時機的條件一般化來討論，下圖 3.13 所示，k 介於有價值棋步的奇數區間，一開始白黑雙方輪流取得有價值棋步，取到 x_i，在有價值棋步的奇數區間條件下 i 為偶數，當白提劫時，黑方可以使用劫材 b_1 來爭取更大的利益。因此我們可以將接下來的盤面簡化成初始盤面為白提劫及剩下的有價值棋步 $x_{i+1}...x_z$ 來討論。

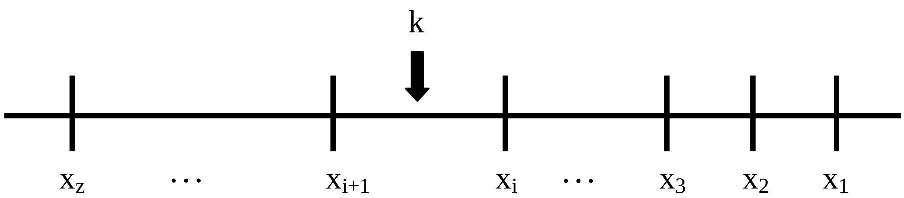


圖 3.13 使用劫材時機一般化圖

為了討論的方便，我們再次的詳細定義所要討論的盤面；初始盤面為白提劫，輪黑方選擇要使用劫材或是取得有價值棋步，並且黑方劫材只有一個 b_1，白方沒有劫材。由於接下來討論的有價值棋步為 $x_{i+1}...x_z$，為了討論的方便，我們剩下的有價值棋步定義為 $x_1...x_z$，所以劫爭的範圍定義為 $k>x_1+X_{even}-X_{odd}$。

首先我們討論只有一個有價值棋步的情形，展開圖為圖 3.14 所示。與先前的方法相同，由最底層的第一個分支開始討論，圖 3.14 虛線框中的子樹(I)。黑方選擇左邊的分支，黑方取得劫材價值 b_1，得到的黑白利益差為 b_1-k-x_1；而黑方選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步價值 x_1，得到的黑白利益差為 x_1-k。因此利用兩邊的利益差可以推得兩個條件式：

- 當 $b_1>2x_1$ 時，黑會選擇左邊的分支，黑取得劫材 b_1 的價值
- 當 $b_1<2x_1$ 時，黑會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

取得條件式後，在此先討論圖 3.14 中標示 A 的分支，由已知得到 $k>x_1+X_{even}-X_{odd}$，所以白方在此不會先取得利益較低的 x_1，因此分支 A 可以先砍掉。接著繼續 bottom up 往上一層，針對 $b_1>2x_1$ 及 $b_1<2x_1$ 討論黑方使用劫材 b_1 後，白方會如何選擇，如圖 3.15。

(a). 當 $b_1>2x_1$ 時

若白方選擇左邊分支(白消劫)的白黑利益差為 $k+x_1-b_1$。

若白方選擇右邊分支(白應劫)的白黑利益差為 x_1-k。

將此兩式消去相同項、移項比較後，可以得到：

- 當 $b_1<2k$ 時，白會選擇左邊的分支，白消劫
- 當 $b_1>2k$ 時，白會選擇右邊的分支，白應劫

(b). 當 $b_1<2x_1$ 時

白方選擇左邊分支(白消劫)，白黑利益差為 k-x_1

白方選擇右邊分支(白應劫)，白黑利益差為 x_1-k

因為由已知得到 $k>x_1+X_{even}-X_{odd}$，所以白方必走左邊的分支，白消劫。

利用目前得到的三個條件式 $b_1<2x_1$、$2k>b_1>2x_1$ 及 $b_1>2k$，再 bottom up 到圖 3.14 的最上一層討論，目前盤面為白提劫，輪黑方選擇使用劫材 b_1 或是取得有價值棋步 x_1。

(a). 當 $b_1<2x_1$ 時

若黑方選擇左邊的分支(黑使用劫材 b_1)，黑白利益差為 x_1-k。

若黑方選擇右邊的分支(黑取得有價值棋步 x_1)，黑白利益差為 x_1-k。

黑方選擇左邊跟右邊得到的利益差相同，但是黑方選擇左邊的分支會浪費一個劫材，因此黑方不會選擇左邊的分支，所以黑方必定選擇取得有價值棋步 x_1。

(b). 當 $2k>b_1>2x_1$ 時

若黑方選擇左邊的分支(黑使用劫材 b_1)，黑白利益差為 b_1-k-x_1。

若黑方選擇右邊的分支(黑取得有價值棋步 x_1)，黑白利益差為 x_1-k。

將此兩式消去相同項、移項比較後，可以得到：

- 當 $b_1>2x_1$ 時，黑會選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1
- 當 $b_1<2x_1$ 時，黑會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

(c). 當 $b_1>2k$ 時

若黑方選擇左邊的分支(黑使用劫材 b_1)，黑白利益差為 k-x_1。

若黑方選擇右邊的分支(黑取得有價值棋步 x_1)，黑白利益差為 x_1-k。

因為由已知得到 $k>x_1+X_{even}-X_{odd}$，所以黑方必走左邊的分支，黑使用劫材 b_1。

經由以上的討論我們可以得到圖 3.15，當黑方劫材 b_1 在不同大小時，黑方可以決定會不會去使用此劫材。

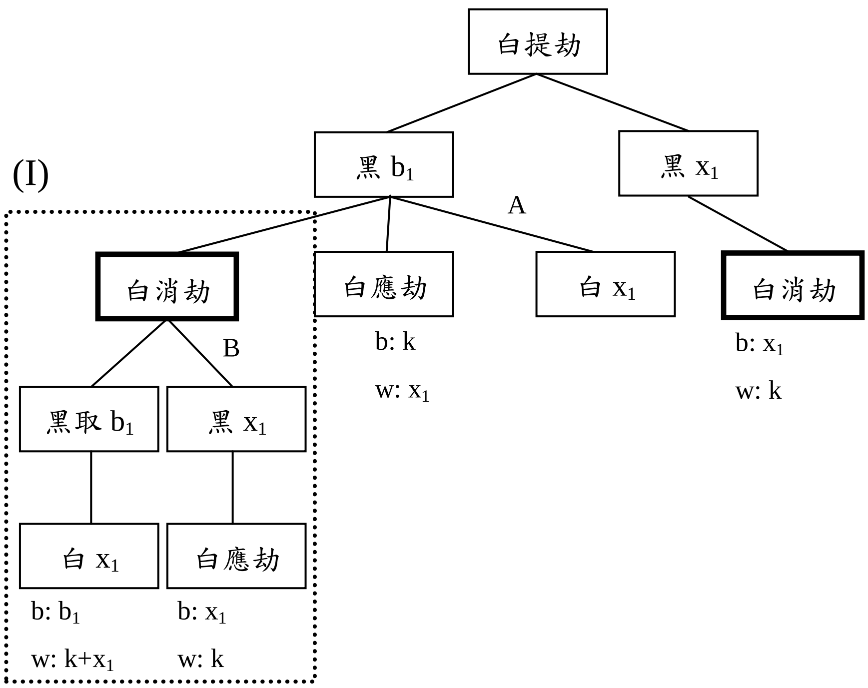


圖 3.14 一個劫材，一個有價值棋步

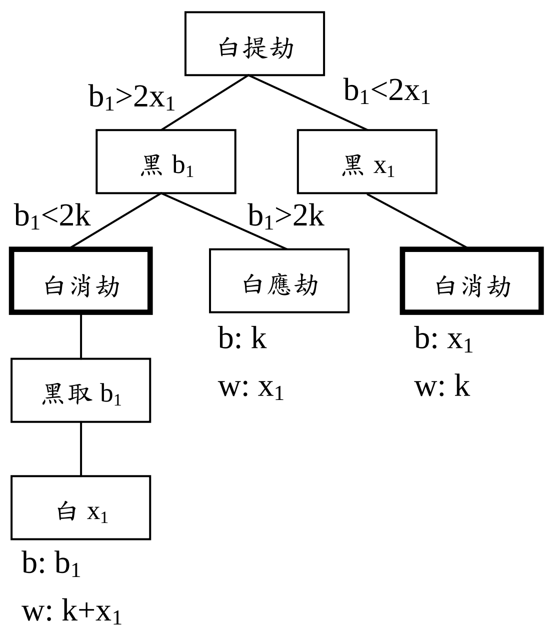


圖 3.15 一個劫材，一個有價值棋步砍完圖

接下來繼續討論恰有二個有價值棋步的情形，先將其展開，如圖 3.16 所示，我們利用相同的辦法做利益差的比較，一步一步 bottom up 後，可以得到整理好的圖 3.17，當黑方劫材 b_1 在不同大小時，黑方可以決定會不會去使用此劫材。

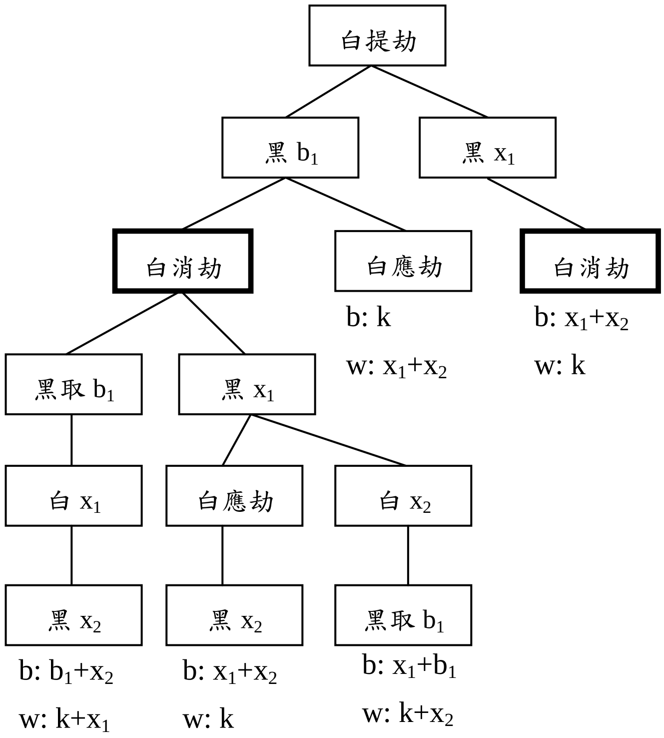


圖 3.16 一個劫材，二個有價值棋步

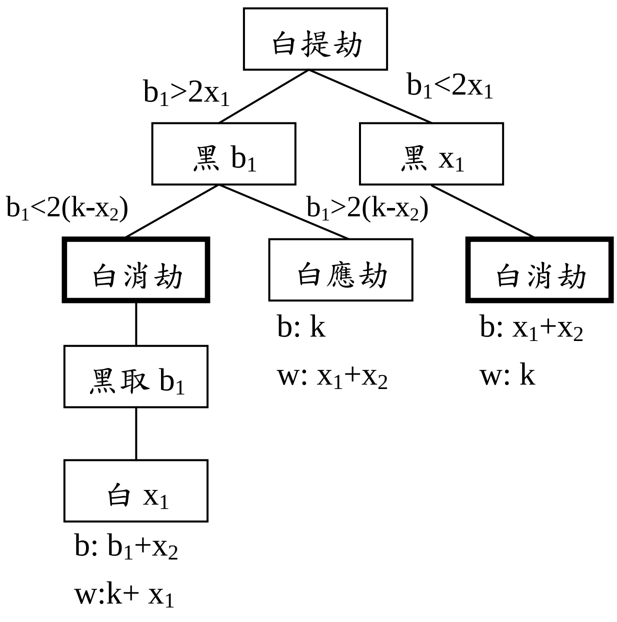


圖 3.17 一個劫材，二個有價值棋步砍完圖

再多討論了幾個不同有價值棋步的情形後，我們可以發現前面三層是固定的，如圖 3.18 所示，而每增加一個有價值棋步，就會在圖中所標示的(I)、(II)和(III)分支的結尾多增加一個尾巴，但是會在(IV)號分支下方卻增加一個分支。由以上的討論發現(IV)號分支到最後是可以砍掉的，其砍掉的方式都是 bottom up 到最上一層，在條件下(IV)號分支與(I)號分支做比較，結果皆為必定走(I)號分支，因此最後的決策會剩下(I)、(II)和(III)分支。因此接下來要証明不論是在奇數的條件下或是偶數的條件下皆會成立。

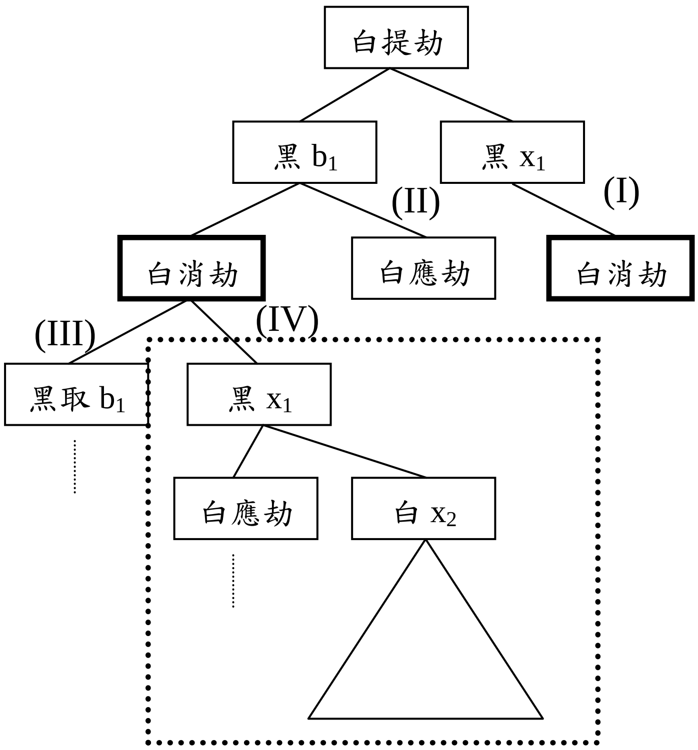


圖 3.18 一個劫材，有價值棋步增加

定理一 ：若只有一個劫材、N 個有價值棋步，N 為奇數時，上述(I)、(II)和(III)以外的分支皆會被砍掉。

證明：

對 N 做數學歸納法的證明，N=1 時如上所述，很明顯成立。

假設 N=g-1 時也成立且 g-1 為偶數。由於此處條件為 N=g-1，因此我們在此證明中 $X_{even}=x_2+x_4+\ldots+x_{g-1}$，$X_{odd}=x_3+x_5+\ldots+x_{g-2}$。圖 3.19 所示，比較此圖虛線框中表示的子樹，可以得到兩個條件式，當 $b_1>2x_{g-1}$ 時，白方會選擇左邊的分支；當 $b_1<2x_{g-1}$ 時，白方會選擇右邊的分支。最後當這兩個條件 bottom up 到最上一層，黑方在此兩個條件的決策下，會將左邊的分支砍掉，因此我們可以得到以下條件式：

(a). $b_1>2x_{g-1}$

若黑方選擇左邊的分支，黑方使用劫材 b_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{odd}+x_{g-1}-k-X_{even}-x_{g-1}$。

若黑方選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步 x_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{even}-k-X_{odd}$。

因為由假設黑方必定選擇右邊的分支，所以將兩式的利益差做比較可以得到條件一：$b_1<2(X_{even}-X_{odd})$。

(b). $2x_{g-2}>b_1>2x_{g-1}$

若黑方選擇左邊的分支，黑方使用劫材 b_1，得到的黑白利益差為 $b_1+x_1+X_{odd}-k-X_{even}$。

若黑方選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步 x_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{even}-k-X_{odd}$。

因為由假設黑方必定選擇右邊的分支，所以將兩式的利益差做比較可以得到條件二：$X_{even}-X_{odd}>x_{g-1}$。

則 $N=g$ 時，g 為奇數，由圖 3.20 所示，在每條路徑的尾端增加了一個 x_g 的價值。並且在圖 3.20 中增加了一個分支，以虛線框表示，於此子樹中先比較其利益差，再將此二條件式 bottom up 到最上層討論：

(1). $b_1<2x_g$

若黑方選擇左邊的分支，黑方使用劫材 b_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{odd}+x_g-k-X_{even}$。

若黑方選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步 x_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{even}-k-X_{odd}-x_g$。

將兩式消去相同項，移項後做比較，再根據條件二，可以得到黑方選擇右邊分支的利益，必定大於左邊分支的利益，因此在 $b_1<2x_g$ 的條件下，左邊的分支可以砍掉。

(2). $2x_{g-1}>b_1>2x_g$

若黑方選擇左邊的分支，黑方使用劫材 b_1，得到的黑白利益為 $b_1+x_1+X_{odd}-k-X_{even}-x_g$。

若黑方選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步 x_1，得到的黑白利益差為 $x_1+X_{even}-k-X_{odd}-x_g$。

將兩式消去相同項，移項後做比較，再根據條件一，可以得到黑選擇右邊分支的利益，必定大於左邊分支的利益，因此在 $b_1<2x_g$ 的條件下，左邊的分支可以砍掉。

Q.E.D

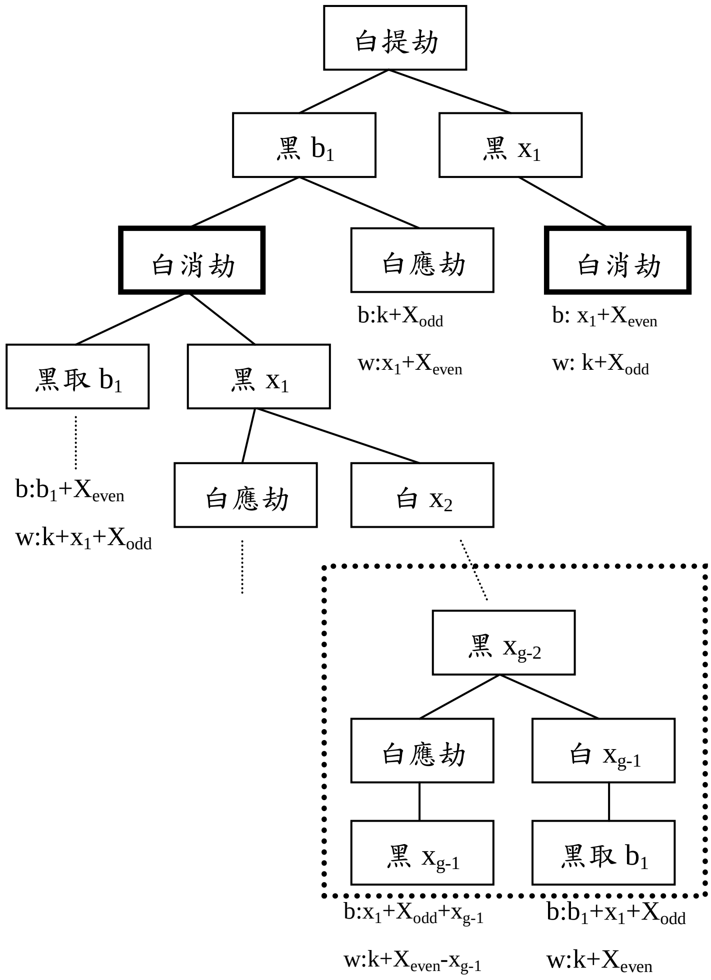


圖 3.19 奇數個有價值棋步證明圖 1

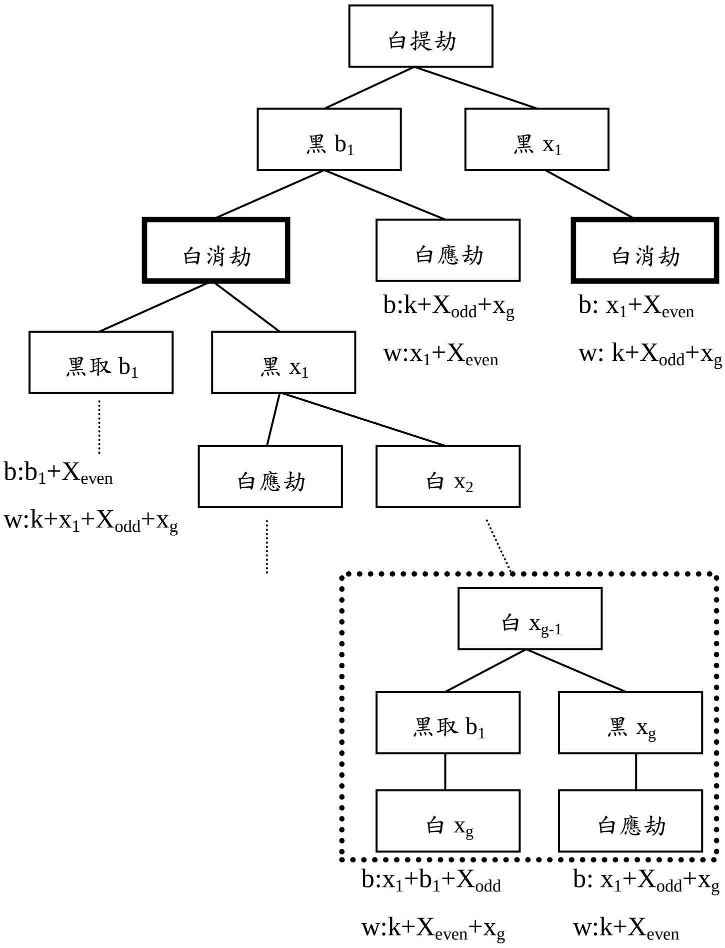


圖 3.20 奇數個有價值棋步證明圖 2

定理二：若只有一個劫材、N 個有價值棋步，N 為偶數時，上述(I)、(II)和(III)以外的分支皆會被砍掉。

證明：用相同的證明方法，我們也可以很簡單的得到 N 為偶數時，也會有相同的結果。

最後我們重新整理黑方有單一劫材、多個有價值棋步的展開圖及其判斷的條件式為何。如圖 3.21，在下層白方選擇消劫或是應劫的白黑利益差比較後，可以得到：

- 當 $b_1>2(k-X_{even}+X_{odd})$時，白方會選擇消劫
- 當 $b_1<2(k-X_{even}+X_{odd})$時，白方會選擇應劫

再 bottom up 到上一層，我們分別討論了在這兩個條件下的情況，可以得到：

- 當 $b_1>2x_1$ 時，黑方會選擇使用劫材
- 當 $b_1<2x_1$ 時，黑方會選擇取有價值棋步 x_1

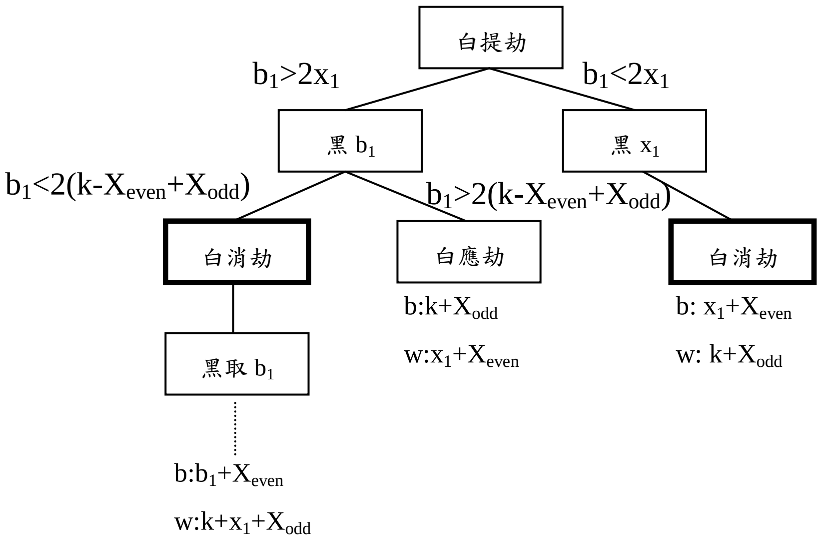


圖 3.21 單一劫材結論圖

我們經由此節的證明，可以得到以下幾個結論：

(1). 黑方使用劫材的條件為：$b_1>2x_1$ 時，黑方使用劫材會獲得較大的利益。

(2). 白方是否會應劫或是不理劫材進行消劫的條件為：$b_1>2(k-X_{even}+X_{odd})$。

(3). 黑方在使用劫材後，如果對方不理劫材而消劫，黑方最佳的下一手為取得劫材價值。

第四節　單方多個劫材的情況

利用第三節得到的黑方劫材是否使用的條件式及白方是否會理會劫材的條件式，可以將劫材分為三種，圖 3.22 表示，劫材由大到小分別為：

- 集合 A，黑方劫材價值很大，白方必定會應劫
- 集合 B，黑方劫材價值中等，白方不會理，但是黑方可以藉由使用它們得到利益
- 集合 C，黑方劫材價值太小，黑方不會使用

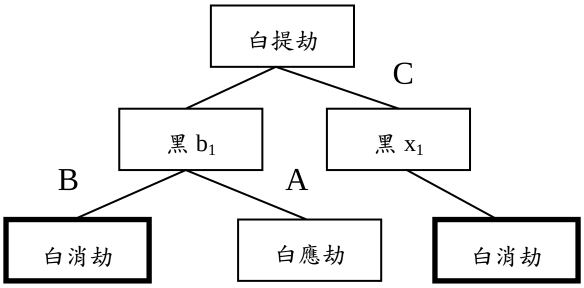


圖 3.22 單方面多個劫材分布圖

接下來考慮黑方的劫材分布在不同的集合中，黑方該如何使用這些劫材。

(1). 黑方的劫材全部分布於集合 A：

因為白方會應劫，黑方無法獲得劫材的價值，因此黑方會由集合 A 中最小的劫材開始使用。

(2). 黑方的劫材全部分布於集合 B：

因為白方不會理此種劫材，黑方可以獲得劫材的價值，因此黑方會由集合 B 中最大的劫材開始使用。

(3). 黑方的劫材全部分布於集合 C：

劫材價值太小了，所以黑方不會使用集合 C 的劫材。

(4). 黑方的劫材僅分布於集合 A 及集合 B：

假設 b_1 為集合 A 的劫材，b_2 為集合 B 的劫材；

黑方使用劫材 b_1 得到的黑白利益差為：$k-X_{even}+X_{odd}-x_1$

黑方使用劫材 b_2 得到的黑白利益差為：$b_2+X_{even}-k-x_1-X_{odd}$

因為，由前提 $b_2<2(k-X_{even}+X_{odd})$

所以 $b_2+X_{even}-k-x_1-X_{odd}<2(k-X_{even}+X_{odd}) +X_{even}-k-x_1-X_{odd}$

可以推得 $b_2+X_{even}-k-x_1-X_{odd}<k-X_{even}+X_{odd}-x_1$

所以黑方使用劫材 b_1 得到的利益必定會大於黑方使用劫材 b_2 得到的利益，因此黑方會優先使用集合 A 的劫材。

第五節　雙方多個劫材的情況

討論完單方面多個劫材的情況後，我們開始思考，當黑方使用劫材之後，白方會怎麼也使用他自己的劫材來對應。如圖 3.23，當黑方使用 A 集合的劫材後，白方會選擇應劫，然後黑方會選擇提劫，接下來換白方使用劫材，因為此時有價值棋步並未改變，所以白方的劫材也可以利用相同的方式分成三種，劫材由大到小分別為：

- 集合 D，白方劫材價值很大，黑方必定會應劫
- 集合 E，白方劫材價值中等，黑方不會理，但是白方可以藉由使用得到利益
- 集合 F，白方劫材價值太小，白方不會使用

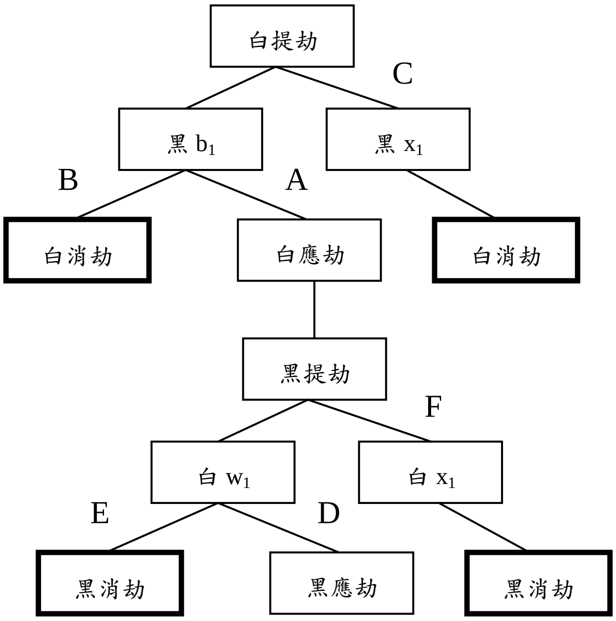


圖 3.23 雙方皆有劫材

因此我們可以找到打劫的主路徑，雙方輪流使用集合 A 與集合 D 的劫材。當某一方的劫材較少，先使用完較大的劫材集合 A 或劫材集合 D 時，才會使用價值較小的劫材集合 B 或劫材集合 E 中的劫材。

例如，黑方的劫材集合 A 比白方的劫材集合 D 中的數量多，因此當白方使用完劫材集合 D 時，接下來只能使用劫材集合 E，讓黑方消劫；但此時黑方可以繼續使用劫材集合 A 與白方的劫材集合 E 交換，當黑方使用完劫材集合 A 時，黑方再進行消劫的動作，讓白方取得劫材價值。

第六節　有價值棋步循環

根據上一節的結果我們可以得知，黑方的劫材可以分成集合 A、B 及 C，白方的劫材可以分成集合 D、E 及 F；黑白雙方開始打劫時會先分別使用劫材集合 A 與集合 D，當某一方消耗完時，只能使用價值較小的劫材集合 B 或是集合 E，讓對方消劫。但是當某一方只剩下價值最小的劫材集合 C 或是集合 F 時，劫材多的那一方可以仗著劫材的優勢，不立刻消劫，會先等對方提劫後，再找劫材來將劫爭提回來。使用有價值棋步的循環，使用得好，可以獲得更大的利益，但是如果誤用了，勢必會造成損失，因此我們接下來要考慮有價值棋步循環的問題。

由於有價值棋步循環發生的情況是在於當一方無符合條件的劫材可用時，因此我們從這個情況開始討論，如圖 3.24 所示，在兩個箭頭標示的分支會進行有價值棋步循環的判斷。

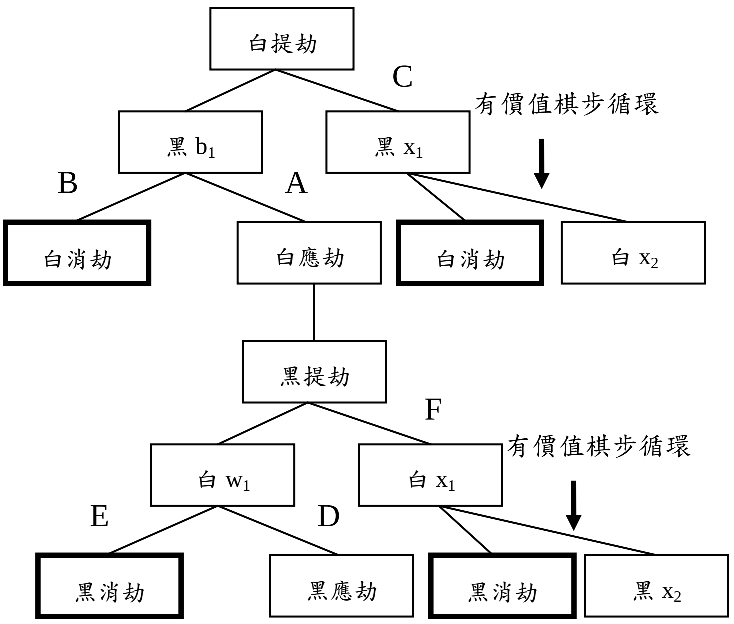


圖 3.24 有價值棋步循環時機

由於兩個有價值棋步循環的時機對黑方及白方來看是對稱的，因此我們假設黑方的劫材比較多來討論。在這邊討論的初始盤面先設定為白取得有價值棋步 x_1 開始；黑方在此時可以選擇消劫或是取得有價值棋步 x_2，再輪到白方可以選擇提劫或是取得有價值棋步 x_3，接下來再繼續往下面展開，圖 3.25 表示當有價值棋步個數為奇數時，展開到結束盤面的狀況，最後一個有價值棋步使用 x_g 表示。

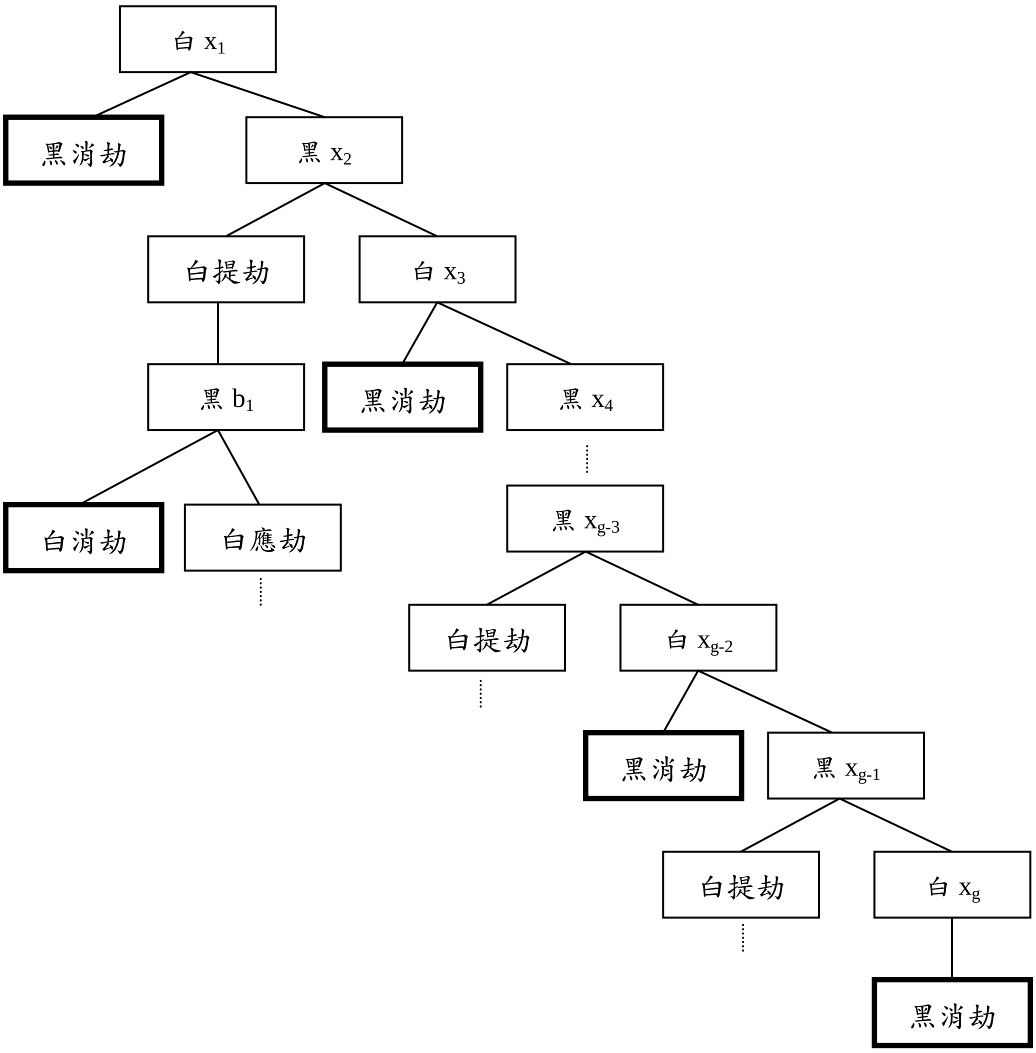


圖 3.25 有價值棋步為奇數，展開到結束的盤面

利用 bottom up 的方式來證明，所以我們先從最底部的第一個分支開始討論，圖 3.26 表示。利用先前得到的規律，我們可以很容易的找到白提劫後的三個分支的判斷式，$b_1<2x_g$、$2k>b_1>2x_g$、$b_1>2x_g$，將這三個條件式 bottom up 到上一層，輪白方選擇提劫或是取有價值棋步 x_g。分別對這三個條件式做比較：

(1). $b_1<2x_g$

若白方選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $x_{g-2}+k-x_{g-1}-x_g$。

若白方選擇右邊的分支白取得有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_g-k-x_{g-1}$。

將相同項消去，所以往左邊分支的白黑利益差為 $k-x_g$，往右邊分支的白黑利益差為 x_g-k。因為 $k>x_g$，因此白方必定選擇左邊的分支。

(2). $2k>b_1>2x_g$

若白方選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $x_{g-2}+k+x_g-x_{g-1}-b_1$。

若白方選擇右邊的分支白取得有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_g-k-x_{g-1}$。

將相同項消去，往左邊分支的白黑利益差為 $k-b_1$，往右邊分支的白黑利益差為 $-k$，因為 $2k>b_1$，因此白方必定選擇左邊的分支。

(3). $b_1>2x_g$

若白方選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_g-x_{g-1}-k$。

若白方選擇右邊的分支白取得有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_g-k-x_{g-1}$。

因為左右分支的利益相同，白選擇左邊的分支可以浪費黑方一個劫材，因此白方必定選擇左邊的分支。

由以上三個條件可以得知，在任何條件下白方必定不會走最右邊的分支，因此圖 3.26 的虛線框(II)這條分支可以砍掉。再 bottom up 到上一層，分別也利用此三個條件做討論。

(1). $b_1<2x_g$

若黑方選擇左邊的分支黑消劫，黑白利益差為 $k+x_g-x_{g-1}-x_{g-2}$。

若黑方選擇右邊的分支黑取得有價值棋步，黑白利益差為 $x_{g-1}+x_g-x_{g-2}-k$。將相同項消去，所以往左邊分支的黑白利益差為 $k-x_{g-1}$，往右邊分支的黑白利益差為 $x_{g-1}-k$。因為 $k>x_{g-1}$，因此黑方必定選擇左邊的分支。所以圖 3.26 中的虛線框(I)這條分支可以砍掉。

(2). $2k>b_1>2x_g$

若黑方選擇左邊的分支黑消劫，黑白利益差為 $k+x_g-x_{g-1}-x_{g-2}$。

若黑方選擇右邊的分支黑取得有價值棋步，黑白利益差為 $x_{g-1}+b_1-x_g-x_{g-2}-k$。將相同項消去，所以往左邊分支的黑白利益差為 $k+x_g-x_{g-1}$，往右邊分支的黑白利益差為 $x_{g-1}+b_1-k-x_g$。所以可以得到在此條件下，當 $b_1<2(k+x_g-x_{g-1})$時，黑會選擇走左邊的分支，黑消劫；當 $b_1>2(k+x_g-x_{g-1})$時，黑會選擇走右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_{g-1}。

(3). $b_1>2x_g$

若黑方選擇左邊的分支黑消劫，黑白利益差為 $k+x_g-x_{g-2}-x_{g-1}$。

若黑方選擇右邊的分支黑取得有價值棋步，黑白利益差為 $x_{g-1}+k-x_g-x_{g-2}$。將相同項消去，所以往左邊分支的黑白利益差為 x_g-x_{g-1}，往右邊分支的黑白利益差為 $x_{g-1}-x_g$。因為 $x_{g-1}>x_g$，所以黑方必定選擇走右邊的分支。

利用前面的討論，我們可以得到在底層砍完後的決策圖，如圖 3.27 所示。

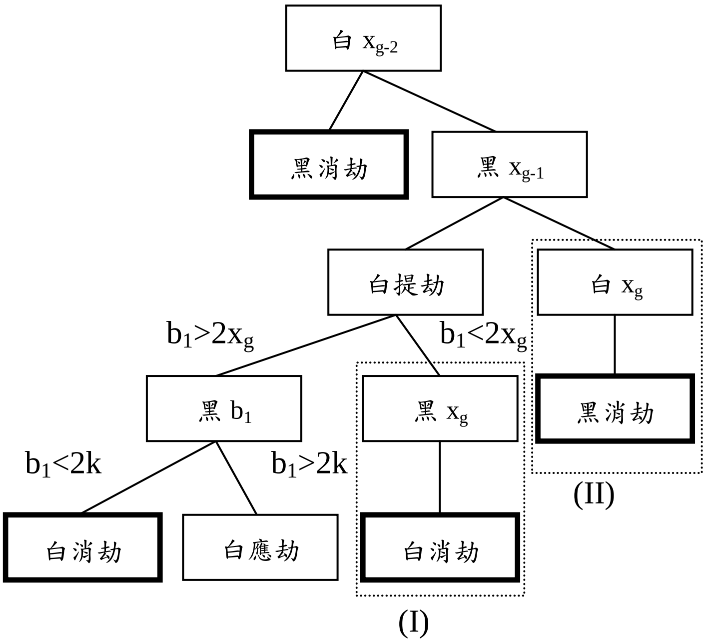


圖 3.26 有價值棋步循環，底層展開圖 1

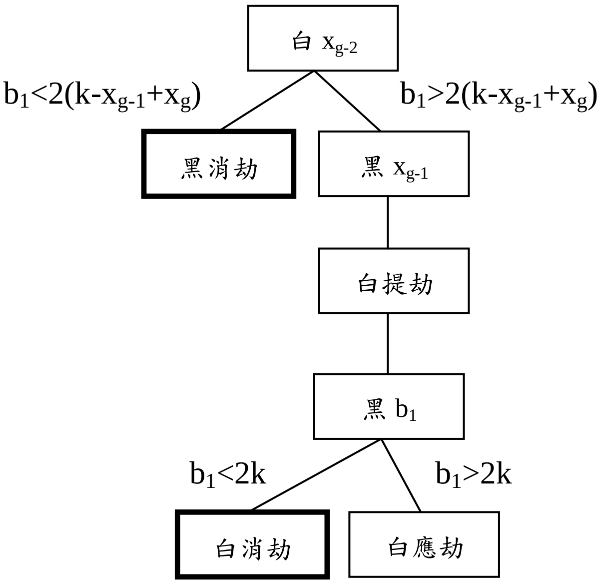


圖 3.27 有價值棋步循環，底層展開圖 1 砍完圖

討論完最底層後，再繼續 bottom up 到上一層，如圖 3.28 所示，左邊的分支可以利用之前的方式很快的找到這顆子樹的判別式，右邊的子樹為先前的討論結果。因此我們可以把此顆展開樹分成 A~F 的分支，針對不同的條件式來討論。

(1). $b_1<2x_{g-2}$，分支 C 與 D 比較

若白選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $k+x_g-x_{g-3}-x_{g-2}-x_{g-1}$。

若白選擇右邊的分支白取有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_{g-1}-x_{g-3}-x_g-k$。

將相同項消去，可以得到白方選擇左邊分支的白黑利益差為 $k+x_g-x_{g-2}-x_{g-1}$，白方選擇右邊分支的白黑利益差為 $x_{g-2}+x_{g-1}-k-x_g$。將兩式移項後可以得到左式等於 k，右式等於 $x_{g-2}+x_{g-1}-x_g$；因為由已知 $k>x_1+(x_2-x_3)+...+(x_{g-1}-x_g)$，所以在此條件下白方必定走左邊的分支。

(2). $2(k-x_{g-1}+x_g)>b_1>2x_{g-2}$，分支 A 與 D 比較

白選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $k+x_{g-2}+x_g-x_{g-3}-x_{g-1}-b_1$。

白選擇右邊的分支白取有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_{g-1}-x_{g-3}-x_g-k$。

將相同項消去，可以得到白方選擇左邊分支的白黑利益差為 $k+x_g-b_1-x_{g-1}$，白方選擇右邊分支的白黑利益差為 $x_{g-1}-k-x_g$。將兩式移項後可以得到左式等於 $2(k+x_g-x_{g-1})$，右式等於 b_1，由已知條件 $2(k-x_{g-1}+x_g)>b_1$，所以在此條件下白方必定走左邊的分支。

經由(1)及(2)的討論後，可以將分支 D 砍掉。

(3). $2k>b_1>2(k-x_{g-1}+x_g)$，分支 B 與 E 比較

若白選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_{g-1}-x_{g-3}-k-x_g$。

若白選擇右邊的分支白取有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+ k+x_g-x_{g-3}-x_{g-1}-b_1$。

將相同項消去後，左邊分支的白黑利益差為 $x_{g-1}-k-x_g$，右邊分支的白黑利益差為 $k+x_g-x_{g-1}-b_1$。將兩式移項後可以得到左式等於 b_1，右式等於 $2(k+x_g-x_{g-1})$。由已知條件 $b_1>2(k-x_{g-1}+x_g)$，所以在此條件下白方必定走左邊的分支。

(4). $b_1>2k$，分支 B 與 F 比較

若白選擇左邊的分支白提劫，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_{g-1}-x_{g-3}-k-x_g$。

若白選擇右邊的分支白取有價值棋步，白黑利益差為 $x_{g-2}+x_g-x_{g-3}-x_{g-1}-k$。

將相同項消去後，左邊分支的白黑利益差為 $x_{g-1}-x_g$，右邊分支的白黑利益差為 x_g-x_{g-1}。因為 $x_{g-1}>x_g$，所以在此條件下白方必定走左邊的分支。

經由(3)及(4)的討論後，可以將分支 E 及分支 F 砍掉。

我們經由這裡的討論可以得到將不可能走到的分支砍掉的決策圖，如圖 3.29。

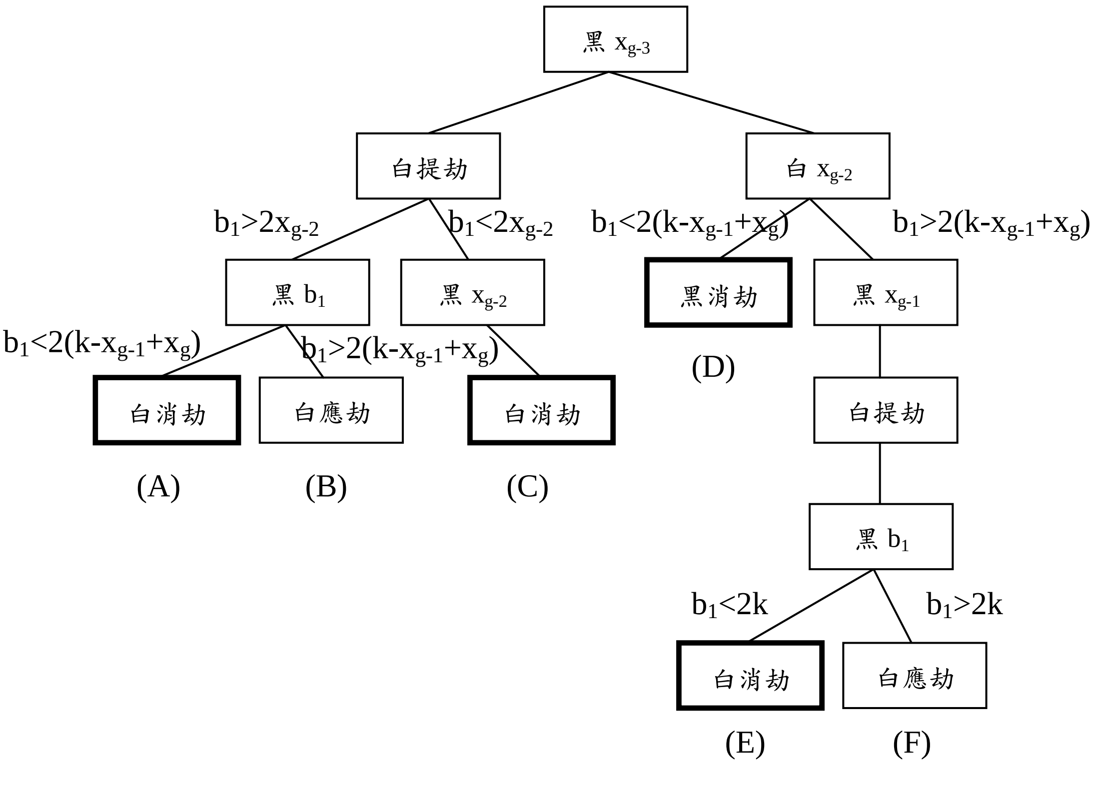


圖 3.28 有價值棋步循環，底層展開圖 2

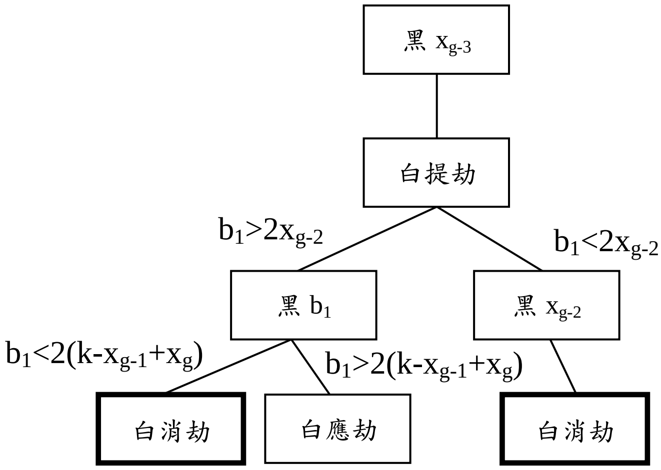


圖 3.29 有價值棋步循環，底層展開圖 2 砍完圖

根據以上的證明，再繼續 bottom up 到上一層，我們發現就會跟最底層的結構相同。所以在此架構下會是每 bottom up 兩層會得到相同的結構。因此我們就可以推得有價值棋步循環，在有價值棋步為奇數的條件判斷圖，以圖 3.30 表示。一開始黑方利用 b_1 與 $2(k-X_{even}+X_{odd})$做比較，來決定是否要進行有價值棋步循環的情形，一旦黑方使用劫材後，白方會依照劫材的大小來決定是否要應劫。雖然黑白雙方判斷的條件式相同，但是因為黑方一旦取得有價值棋步後，有價值棋步會少一個，因此 X_{even} 與 X_{odd} 會不相同。而有價值棋步為偶數的情況，利用同樣的手法也可以證明。

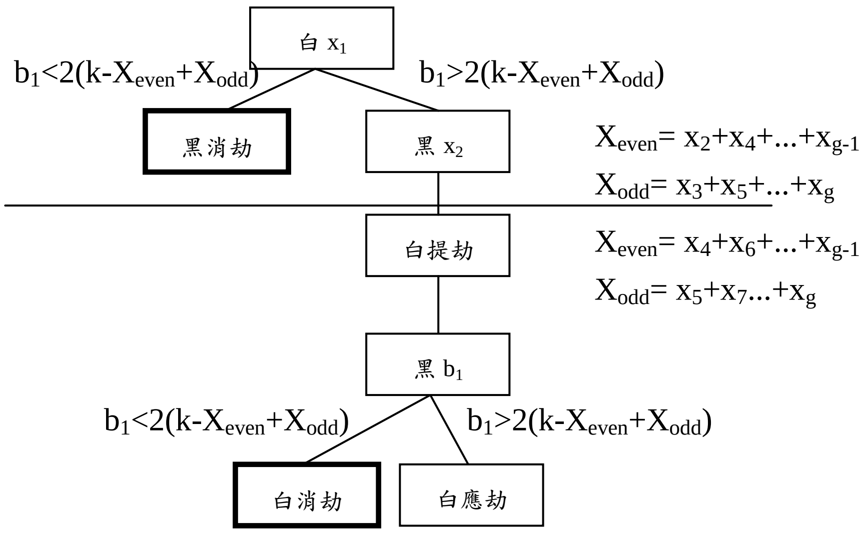


圖 3.30 有價值棋步循環，頂層展開圖

由以上的證明我們可以發現一個規律就是，黑方每經過一次有價值棋步循環，就會少二個有價值棋步；所以在這種情況可能造成白方原本沒有可以使用的劫材，但是因為有價值棋步的改變，而造成黑白雙方可用的劫材個數變多。因此我們設計了一個遞迴的演算法，來決定黑方是否要進行有價值棋步的循環。此遞迴的演算法為在此情況下，當有價值棋步被取走後，就會遞迴判斷是否要取得有價值棋步。

第四章　單一劫爭的打劫策略-損劫

第一節　考慮損劫，單方一個劫材的情況

損劫也是圍棋裡常常出現的一種劫材。損劫，顧名思義，就是我方使用了這種劫材後，當對方應劫，我方就會遭受到損失的一種劫材。因此考慮是否要使用損劫，成為了一種兩難的情況。思考完單一劫爭在本劫的情況下，不使用損劫的打劫策略後，我們試著將損劫的因素加入考量。首先定義損劫的參數，在先前的討論裏只有定義劫材的價值 $b_1,...,b_m$ 及 $w_1,...,w_n$，而現在我們將雙方的每個劫材增加了另一個參數：劫材的損值 $b_1',....,b_m'$及 $w_1',....,w_n'$，劫材的價值與劫材的損值皆為正值。但是不相同的是當我方使用劫材後，假使我方取得劫材價值，則在我方的利益加上劫材價值；假使我方使用劫材後，對方應劫，則我方無法取得劫材價值，相對的讓自己遭受到損值的損失。

損劫的使用與否，我們利用先前第三章第三節得到的結果我們可以得到劫材的使用時機，我們由這個打劫的時間點開始討論。初始盤面為白提劫及剩下的有價值棋步定義為 $x_1,...,x_z$，劫爭價值 $k>x_1+X_{even}-X_{odd}$。在這裏我們也先由最簡單的情況，黑方只有一個劫材的情況開始討論。

圖 4.1 為考慮損劫的條件下，恰有一個有價值棋步且黑方有一個劫材的展開圖。我們由最下面一層開始 bottom up 討論其利益差。最底層的盤面為白消劫，輪黑方選擇取得有價值棋步 b_1 的價值或是取得有價值棋步。因此我們利用兩條分支的黑白利益差可以推得兩個條件式：

- 當 $b_1+b_1'>2x_1$ 時，黑方會選擇左邊的分支，黑取得劫材的價值
- 當 $b_1+b_1'<2x_1$ 時，黑方會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步

我們繼續 bottom up 到上一層，根據 $b_1+b_1'>2x_1$ 及 $b_1+b_1'<2x_1$ 這兩個條件式做討論。

(a). 當 $b_1+b_1'>2x_1$ 時

若白方選擇左邊分支白消劫，白黑利益差為 $k+x_1-b_1$。

若白方選擇右邊分支白應劫，白黑利益差為 $x_1+b_1'-k$。

將兩式消去相同項，移項比較後，可以得到：

- 當 $b_1+b_1'<2k$ 時，白方會選擇左邊的分支，白消劫
- 當 $b_1+b_1'>2k$ 時，白方會選擇右邊的分支，白應劫

(b). 當 $b_1+b_1'<2x_1$ 時

若白方選擇左邊分支白消劫，白黑利益差為 $k+b_1'-x_1$。

若白方選擇右邊分支白應劫，白黑利益差為 $x_1+b_1'-k$。

將兩式消去相同項，移項比較後，可以得到左邊分支的白黑利益差為 $k-x_1$，右邊分支的白黑利益差為 x_1-k。由已知條件可以得知 $k>x_1$，因此在此條件下，白方必定選擇左邊的分支。

由以上的判斷，我們可以找到三個條件式 $b_1+b_1'>2k$、$2k>b_1+b_1'>2x_1$ 及 $b_1+b_1'<2x_1$，接下來再將此三個條件式 bottom up 到最上層進行討論。目前的盤面為白提劫，輪黑方選擇使用劫材 b_1 或是取得有價值棋步 x_1。

(a). 當 $b_1+b_1'>2k$ 時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 $k-x_1-b_1'$。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1-k。

經由移項比較後，可以得到：

- 當 $b_1'<2(k-x_1)$時，黑方會選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1
- 當 $b_1'>2(k-x_1)$時，黑方會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

(b). 當 $2k>b_1+b_1'>2x_1$ 時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 b_1-k-x_1。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1-k。

將兩式消去相同項，移項比較後可以得到：

- 當 $b_1>2x_1$ 時，黑方會選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1
- 當 $b_1<2x_1$ 時，黑方會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

(c). 當 $b_1+b_1'<2x_1$ 時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 x_1-k-b_1'。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1-k。

將兩式消去相同項，移項後可以得到，右邊分支的利益必定大於左邊分支的利益，因此黑方必走右邊，所以往左邊的分支可以砍掉。

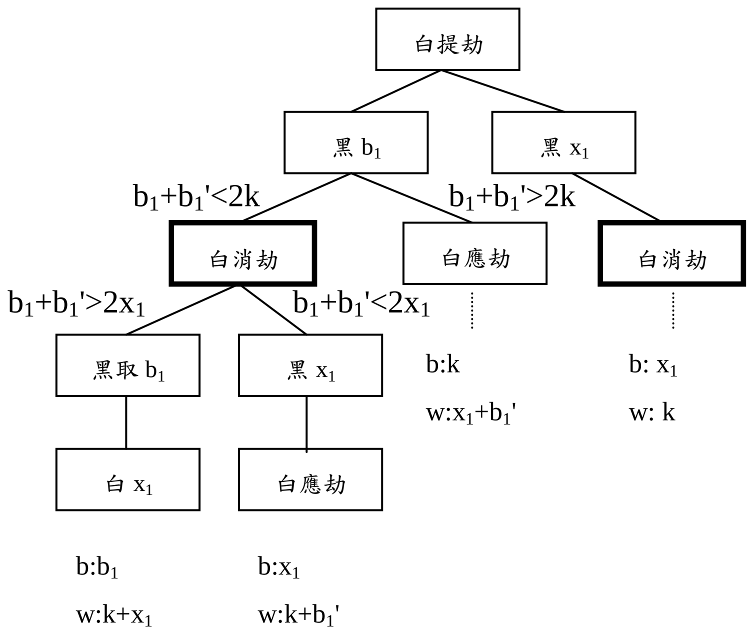


圖 4.1 考慮損劫，一個劫材，一個有價值棋步

我們繼續對以上的討論做整理，由討論(a)可以得到：當 $b_1+b_1'>2k$ 且 $b_1'<2(k-x_1)$ 時，黑方會選擇左邊的分支(使用劫材 b_1)，然後白方會選擇右邊的分支(白應劫)；由討論(b)可以得到：當 $2k>b_1+b_1'>2x_1$ 且 $b_1>2x_1$ 時，黑方會選擇左邊的分支(使用劫材 b_1)，然後白方會選擇左邊的分支(白消劫)。其他的情形則黑方會選擇右邊的分支，黑方取得有價值棋步 x_1。

首先，對討論(a)的條件做整理。因為 $b_1'<2(k-x_1)$，移項後可以得到 $2x_1+b_1'<2k$，又因為 $b_1+b_1'>2k$，所以可以推得 $b_1>2x_1$。

接下來，對討論(b)的條件做整理。因為 $2k>b_1+b_1'$ 且 $b_1>2x_1$，所以 $2k>2x_1+b_1'$，移項之後可以得到 $b_1'<2(k-x_1)$。

我們整理後可以發現討論(a)與討論(b)，具有相同的條件式，因此我們將此相同的條件式整合，可以得到黑方判斷是否使用劫材 b_1 的條件式為 $b_1>2x_1$ 且 $b_1'<2(k-x_1)$，如圖 4.2 所示。

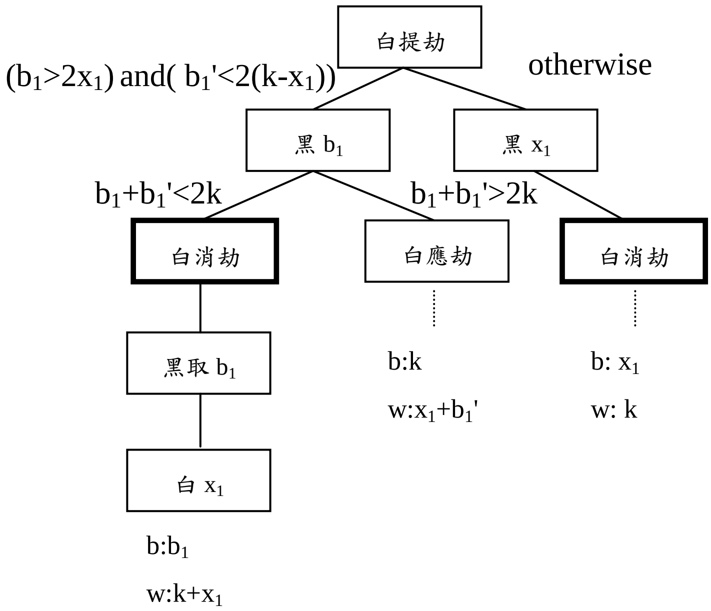


圖 4.2 考慮損劫，一個劫材，一個有價值棋步決策圖

接下來繼續討論考慮損劫的情況下，恰有二個有價值棋步且黑方有一個劫材的情形。我們利用相同的方法做利益差的比較，一步一步 bottom up 後可以得到初步整理好的圖 4.3。接下來我們針對初步所得到的四個條件式做討論：

(a). 當 $b_1+b_1'>2(k-x_2)$時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 $k-x_1-x_2-b_1'$。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1+x_2-k。

將兩式比較後可以得到：

- 當 $b_1'<2(k-x_1-x_2)$時，黑方會選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1
- 當 $b_1'>2(k-x_1-x_2)$時，黑方會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

(b). 當 $2(k-x_2)>b_1+b_1'>2x_1$ 時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 $b_1+x_2-k-x_1$。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1+x_2-k。

將兩式比較後可以得到：

- 當 $b_1>2x_1$ 時，黑方會選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1
- 當 $b_1<2x_1$ 時，黑方會選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1

(c). 當 $2x_1> b_1+b_1'>2x_2$ 時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 $x_1+x_2-k- b_1'$。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1+x_2-k。

將兩式消去相同項後，可以得到右邊分支的黑白利益差必定大於左邊分支的黑白利益差，所以黑方必定選擇走右邊的分支，亦即黑取得有價值棋步 x_1。因此在此條件下，往左走的分支可以砍掉。

(d). 當 $2x_2> b_1+b_1'$時

若黑方選擇左邊的分支，黑使用劫材 b_1，黑白利益差為 $x_1+ b_1-k-x_2$。

若黑方選擇右邊的分支，黑取得有價值棋步 x_1，黑白利益差為 x_1+x_2-k。

將兩式消去相同項後，黑方選擇左邊分支的黑白利益差為 b_1-x_2，黑方選擇右邊分支的黑白利益差為 x_2。因為由前提 $2x_2>b_1+b_1'$，可以推得 $2x_2-b_1'> b_1$。因此 $b_1-x_2<x_2- b_1'<x_2$，所以黑方必定選擇右邊的分支，亦即黑取得有價值棋步 x_1。

我們由此發現，與先前考慮損劫的條件下、恰有一個有價值棋步且黑方有一個劫材的情況相同，會剩下討論(a)與討論(b)繼續整理。同樣在整理後可以發現討論(a)與討論(b)，具有相同的條件式，因此我們將此相同的條件式整合，可以得到黑方判斷是否使用劫材 b_1 的條件式為 $b_1>2x_1$ 且 $b_1'<2(k-x_1-x_2)$，如圖 4.4 所示。

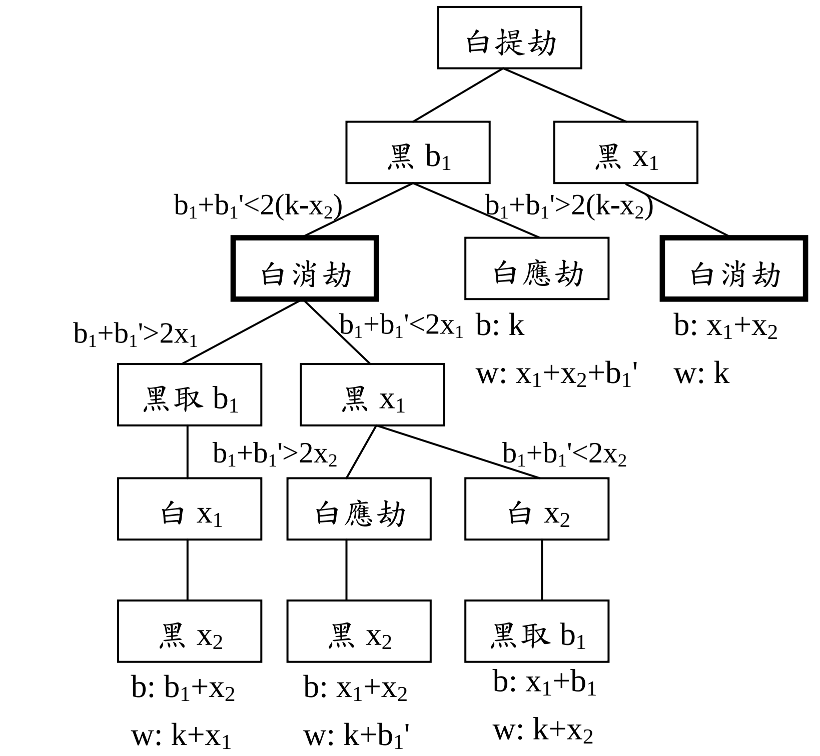


圖 4.3 考慮損劫，一個劫材，二個有價值棋步初步整理圖

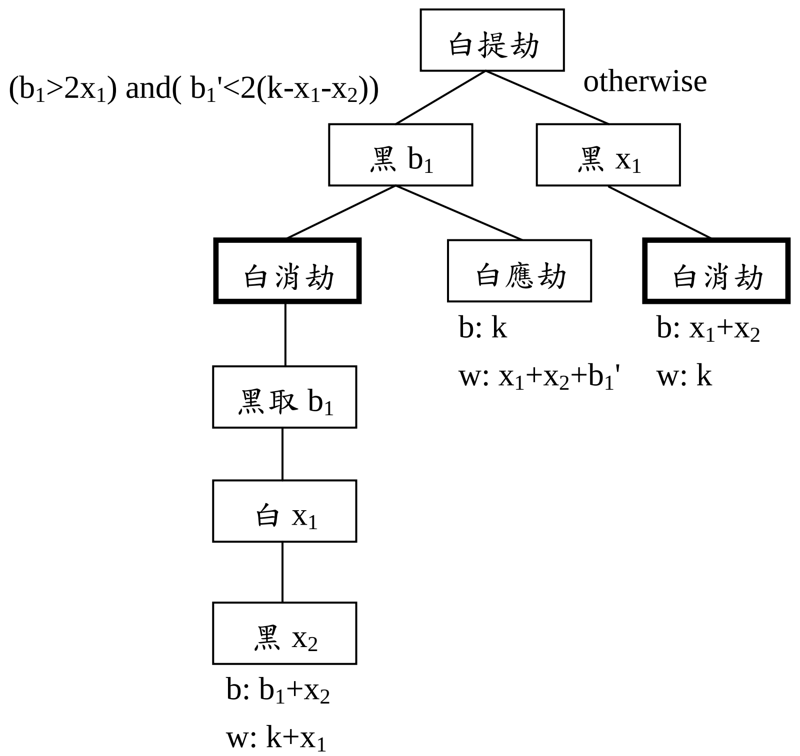


圖 4.4 考慮損劫，一個劫材，二個有價值棋步決策圖

根據以上的討論,我們可以發現與先前第三章第三節(不考慮損劫且黑方具有一個劫材)的情況相同。在此決策樹裏，前三層是固定的，如圖 4.5 所示，而每增加一個有價值棋步，則會在圖中標示的(I)、(II)和(III)分支的結尾增加一個尾巴，但是會在(IV)號分支下方增加一個分支。我們利用與第三章第三節證明定理一相同的手法，可以證明(IV)號分支是可以砍掉的，不影響決策。

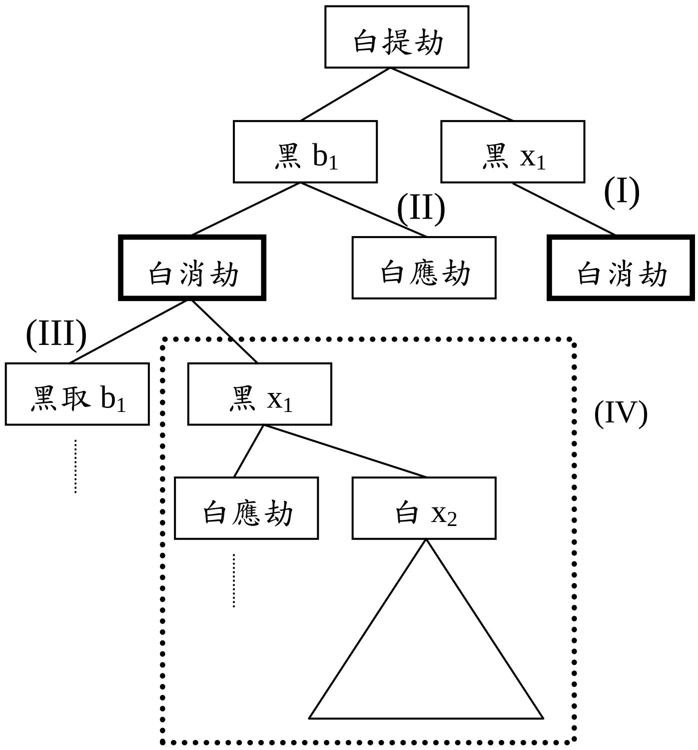


圖 4.5 考慮損劫，一個劫材，有價值棋步增加

將不會影響決策的分支砍掉後，我們將有價值棋步的個數繼續推廣，如圖 4.6 所示。利用相同的方法，由底層開始討論，再將所得到的條件 bottom up，將條件整理後可以得到黑方在考慮使用損劫的條件下，是否使用劫材 b_1 的條件為 $b_1>2x_1$ 且 $b_1'<2(k-x_1-X_{even}+X_{odd})$。而當 $b_1+b_1'<2(k-X_{even}+X_{odd})$時，白方會選擇不理會黑方劫材而消劫；當 $b_1+b_1'>2(k-X_{even}+X_{odd})$時，白方會選擇應劫。

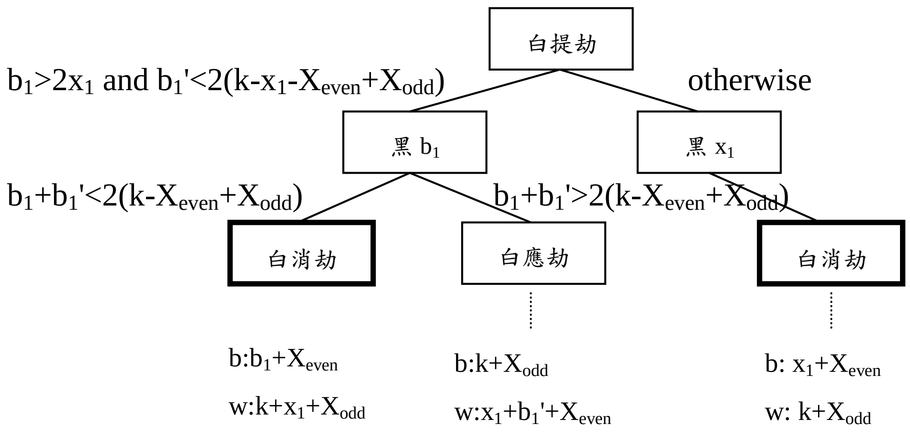


圖 4.6 考慮損劫，單一劫材決策圖

第二節　損劫的結論

我們利用前一節的結果，我們可以得到黑方劫材是否使用的條件式及白方是否會理會劫材的條件式。因此我們可以用第三章第四節相同的方法，將黑方劫材分成三種：集合 A、集合 B、集合 C，如圖 4.7 所示。

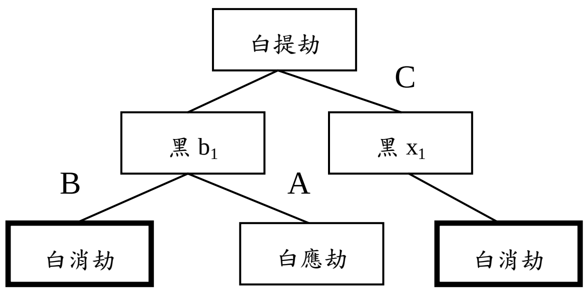


圖 4.7 考慮損劫，單方面多個劫材

目前損劫的部分只能判定劫材的使用條件及對方是否會應劫，但是尚未證明損劫的使用方式。但是依照我們的猜測，損劫應該也是可以利用 bottom up 比較利益差的方式證明出來的。

第五章　結論與未來研究方向

在本論文裏，我們將打劫過程中所有可能發生的情況都納入考慮，來確保不會有可能獲得更大利益的情況被忽略，利用 MiniMax 的搜尋原則來建構出打劫的流程圖，在預設擁有各種需要的盤面資訊下，求出在目前盤面的情況下最佳的打劫策略。利用 bottom up 的方式，來比較 MiniMax 利益差，將不可能走到的分支砍掉，來找到決策的判斷式。

一開始我們先討論了單一劫爭的本劫問題，我們利用討論、證明的方式得到了開始打劫的時間點、使用劫材的條件、是否回應對方的劫材。利用這些條件的決策，我們可以快速的決定下一步的最佳策略。除此之外，我們還另外討論了有價值棋步循環的問題，當我方劫材具有優勢時，是否會進入有價值棋步循環的交換。最後我們討論了單一劫爭在考慮損劫的情況下的本劫問題，目前已經找出損劫是否會使用的條件判斷式。但是如何使用損劫卻尚未證明出來，在未來研究的首要目標是將損劫的部分完全的解出來，進而討論其他劫爭的情形。

參考文獻

[1]. L. V. Allis, “Searching for solutions in games and artificial intelligence,” Ph.D Dissertation Vrije, Universitat Amsterdam, Maastricht, 1994.

[2]. S. Russell, P. Norving, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 2/E, PEARSON, 2003.

[3]. 日本圍棋規則，http://go.yenching.edu.hk/japrule.htm。

[4]. 村島誼紀，《劫爭辭典》，理藝出版社，1997。

[5]. 林玉祥，“電腦圍棋中考慮使用損劫之打劫策略研究”，國立台灣師範大學資訊工程研究所，碩士論文，2007。

[6]. 林海峰，《打劫的魔力》，理藝出版社，1997。

[7]. 春蘭盃世界職業圍棋錦標賽，http://www.web2go.idv.tw/gopro/go_view.php?id=64074。

[8]. 春蘭盃決賽局報導，http://big5.am765.com/ty/jdlt/zhty/200906/t20090623_464848.htm 。

[9]. 黃士傑，“電腦圍棋打劫的策略”，國立台灣師範大學資訊工程研究所，碩士論文，2003。

[10]. 圍棋介紹，http://zh.wikipedia.org/zh/%E5%9B%B4%E6%A3%8B。

[11]. 圍棋九品制，http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%9B%B4%E6%A3%8B%E4%B9%9D%E5%%93%81%E5%88%B6。

[12]. 圍棋起源，http://tw.myblog.yahoo.com/jw!Q8rEhiqCQUUYAHE1u3_F/article?mid=55。